

ELETTRO MAGNETISMO

Appunti + riassunto

Corso di J. M. Quartieri

Creato da : giovi88, folgore , peppepeppo

Riorganizzato da: Di Palma Felice

17/06/2013

Indice Appunti

INDICE DEI CONTENUTI

- Sistemi di riferimento ortogonali
 - Coordinate cartesiane
 - Coordinate sferiche
 - Coordinate cilindriche
- Operatori differenziali
 - Divergenza di una funzione vettoriale
 - Teorema della divergenza (o di Gauss-Ostrogradsky)
 - Divergenza in coordinate cartesiane
 - Rotore di una funzione vettoriale
 - Teorema della circuitazione (o di Stokes)
 - Rotore in coordinate cartesiane
 - Gradiente
 - Laplaciano
 - Operatori differenziali in sintesi
- Campi elettrostatici di alcune distribuzioni continue di carica
 - Campo elettrostatico generato da un anello uniformemente carico, nei punti del suo asse -
 - Campo elettrostatico generato da un filo uniformemente carico, a forma di arco di - circonferenza, nel suo centro
 - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico -
 - Campo elettrostatico generato da un disco uniformemente carico, nei punti del suo asse (I-II metodo)
 - Campo elettrostatico generato da un piano indefinito, uniformemente carico (I-II metodo) -
 - Campo elettrostatico generato da due piani carichi uniformemente, indefiniti e paralleli -
 - Equivalenza tra i campi elettrostatici prodotti da un filo rettilineo carico ed un filo a forma - di arco di circonferenza nel punto P, centro della circonferenza, con filo rettilineo tangente ad essa (arcolinea)
 - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo di lunghezza L, uniformemente carico ρ
- Teorema di Gauss
 - Premessa (1): flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme attraverso - due superfici che sottengono a un angolo solido
 - Premessa (2): flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie sferica, con il campo - generato da una carica posta al centro della sfera
 - Dimostrazione del teorema di Gauss -
 - Enunciato del teorema di Gauss -
 - Teorema di Gauss in forma differenziale (o locale) -
- Applicazioni del teorema di Gauss per il calcolo dell'espressione del campo elettrostatico generato da alcune distribuzioni continue di carica
 - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico
 - Campo elettrostatico generato da un piano indefinito, uniformemente carico
 - Campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita su una superficie sferica
 - Campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita in una sfera
 - Campo elettrostatico generato da una carica Q distribuita in una sfera con densità volumica variabile, funzione del punto

- Distribuzione della carica su un conduttore isolato -
- Campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un conduttore isolato, carico: teorema di Coulomb -
- Conservatività del campo elettrostatico -
- Linee di forza del campo elettrostatico -
- Schermo elettrostatico
- Potenziale elettrostatico -
 - Premessa matematica: descrizione di campi scalari e vettoriali -
 - Derivata direzionale -
 - Ripasso su operatori differenziali -
 - Forze conservative ed energia potenziale -
 - Campi conservativi e funzioni potenziali -
 - Definizione di potenziale elettrostatico -
 - Potenziale elettrostatico generato da una distribuzione continua di carica generica (lineare, superficiale, volumica) -
- Calcolo di potenziali
 - Regola generale per il calcolo di potenziali -
 - Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme -
 - Potenziale elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica
 - Potenziale elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita in una sfera -
 - Potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico -
- La superficie di un conduttore è equipotenziale -
- Energia elettrostatica
 - Energia elettrostatica di due cariche puntiformi
 - Energia elettrostatica di N cariche puntiformi
 - Espressione dell'energia elettrostatica in funzione del potenziale elettrostatico
- Dipolo elettrico
 - Definizione di dipolo elettrico e di momenti di dipolo elettrico
 - Campo elettrostatico in prossimità di un dipolo elettrico
 - Calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti della retta delle due cariche, esternamente ad esse
 - Comportamento di un dipolo elettrico quando questo è immerso in un campo elettrico: momento della forza relativo ad un dipolo
- Condensatori
 - Definizione di condensatore e di capacità
 - Energia elettrostatica di un condensatore
- Analisi di alcune tipologie di condensatori comunemente diffusi
 - Condensatore piano: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
 - Condensatore sferico: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
 - Condensatore cilindrico: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
- Correnti
 - Definizione di corrente elettrica -
 - Calcolo della velocità di una corrente j
 - Densità di corrente -

- Equazione di continuità -
- Leggi di Ohm (I-II) -
- Effetto Joule -
- ❖ **Campo di induzione magnetica**
 - Introduzione al campo magnetico e forza di Lorentz
 - Azione del campo di induzione magnetica su una carica q in esso iniettata
- ❖ **I formula di Laplace ed applicazioni**
 - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo a forma di arco di circonferenza, percorso da corrente, nel suo centro
 - Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsa da corrente, nel suo centro
 - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo finito, percorso da corrente
 - Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsa da corrente, nei punti del suo asse
 - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo indefinito, percorso da corrente: legge di Biot-Savart
- ❖ **Notazioni su campi centrali e azimutali**
- ❖ **II formula di Laplace ed applicazioni**
 - Momento di dipolo di associato ad una spira percorsa da corrente
 - Momento torcente di una spira percorsa da corrente, immersa in un campo magnetico
 - Forza agente su un tratto di filo, percorso da corrente, ed immerso in un campo magnetico uniforme
 - Forza agente su un filo chiuso, percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico uniforme
 - Interazione tra due fili paralleli e indefiniti, percorsi da corrente
- ❖ **Teorema di Ampere**
 - Premessa matematica: circuitazione di un campo scalare lungo una linea -
 - Teorema di Ampere in forma integrale -
 - Teorema di Ampere in forma differenziale -
- ❖ **Il solenoide**
 - Calcolo del campo magnetico all'interno di un solenoide percorso da corrente
- ❖ **Induzione elettromagnetica**
 - Legge dell'induzione elettromagnetica
 - Fenomeni di induzione elettromagnetica di I specie
 - Fenomeni di induzione elettromagnetica di II specie
 - Fenomeni di autoinduzione
 - Fenomeni di mutua induzione
- ❖ **Equazioni di Maxwell statiche con spiegazioni**
- ❖ **Equazioni del campo elettromagnetico**
 - Teorema della derivata temporale del flusso di un campo vettoriale
 - Campo elettromotore non irrotazionale (non conservativo)
 - Teorema di Ampere-Maxwell in forma differenziale
 - Teorema di Ampere-Maxwell in forma integrale: corrente di spostamento
 - Principali proprietà delle onde elettromagnetiche e vettore di poynting

Operatori differenziali: (Indice Riassunto)

- Divergenza e rotore e teoremi : 66
- Flusso e Circuitazione : 67
- Campo conservativo e solenoidale : 68

Carica elettrica :

- Generalità forza di Coulomb : 69
- Teorema di Gauss : 70-72
- Conservatività campo E : 72
- Teorema di coulomb : 73-74
- Campi di alcune distr. di carica : 75-76
- Campo E e alcuni esempi distr. di carica (sfera) : 77-84
- Potenziale ecc... : 85-87
- Condensatori : 88-89

Correnti :

- Correnti : 90
- Legge di Ohm e f.e.m. : 91-92
- Resistenze e kirchoff : 92-93

Campo magnetico :

- Lorentz , Biot-savart , Laplace : 94-95
- Solenoide : 95
- Teorema di Ampere : 96-98
- Induzione elettromagn. e F-N-L: 98-101
- Teorema di Ampere-Maxwell : 102-103
- Eq. Maxwell : 103

A fine libro : domande indigeste Quartieri

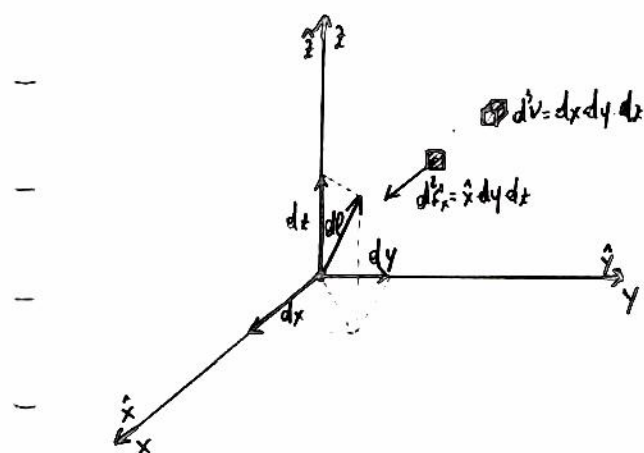
Un sistema di riferimento ortogonale ha coordinate sono perpendicolari l'una all'altra. Sono stati ideati molti sistemi di riferimento ortogonali, ma quelli più usati sono:

- il sistema in coordinate cartesiane (anche dette rettangolari)
- il sistema in coordinate sferiche
- il sistema in coordinate cilindriche

La motivazione di avere il bisogno di più di un sistema di riferimento è puramente analitica: le soluzioni di determinati problemi può essere molto facilitate scegliendo convenientemente il sistema di riferimento più adatto alle peculiarità del problema.

COORDINATE CARTESIANE

Il sistema in coordinate cartesiane è costituito da 3 assi ortogonali, orientati lungo le 3 direzioni x, y, z . Ciascun asse è associato un versore di modulo unitario $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.



La lunghezza differenziale in coordinate cartesiane è il vettore definito come: $dl = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$

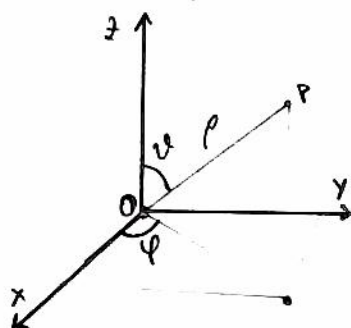
L'area differenziale d^2s è un elemento vettoriale di modulo d'uguale al prodotto di due lunghezze differenziali, come $dl_y = dy$ e $dl_z = dz$, e la sua direzione è indicata da un vettore diretto lungo la terza direzione, in questo caso \hat{z} .

Però, per un'area differenziale nel piano $y-z$ si ha: $d^2s_x = \hat{x} dy dz$. Analogamente: $d^2s_y = \hat{y} dx dz$ (piano $x-z$) e $d^2s_z = \hat{z} dx dy$ (piano $x-y$).

Il volume differenziale è uguale al prodotto di tutte e 3 le lunghezze differenziali: $dV = dx dy dz$

COORDINATE SFERICHE

Le coordinate sferiche sono un sistema di coordinate nello spazio determinato da 3 parametri, ρ, φ, ϑ . Detto ρ la lunghezza del raggio, e detto ϑ l'angolo fatto dallo spazio, il parametro ρ indica la distanza fra P e O , ϑ è l'angolo fra \vec{OP} e l'asse z , mentre φ è l'angolo fra l'asse x e la proiezione di \vec{OP} nel piano xy .



Possono delle coordinate sferiche quelli contenute e viceversa:

$$(\rho, \varphi, \vartheta) \rightarrow (x, y, z)$$

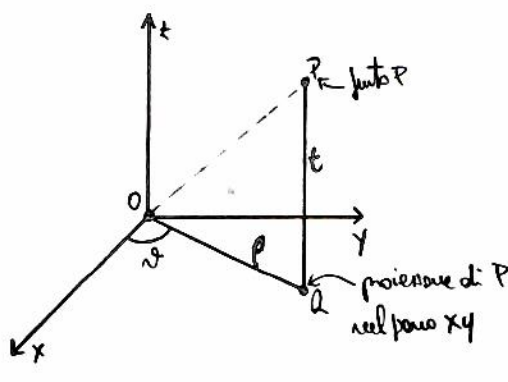
$$\begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta \end{cases}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \vartheta, \varphi)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$

COORDINATE CILINDRICHE

Le coordinate cilindriche sono un sistema di coordinate nello spazio determinate da tre parametri: ρ, φ, z . Nella O l'origine del sistema, e detto P un qualsiasi punto dello spazio, e detto Q la sua proiezione sul piano xy , il parametro ρ indica la lunghezza di OQ mentre φ indica l'angolo fra l'asse x e OQ :



Passaggio dalle coordinate cilindriche a quelle cartesiane e viceversa:

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (x, y, z):$$

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z):$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

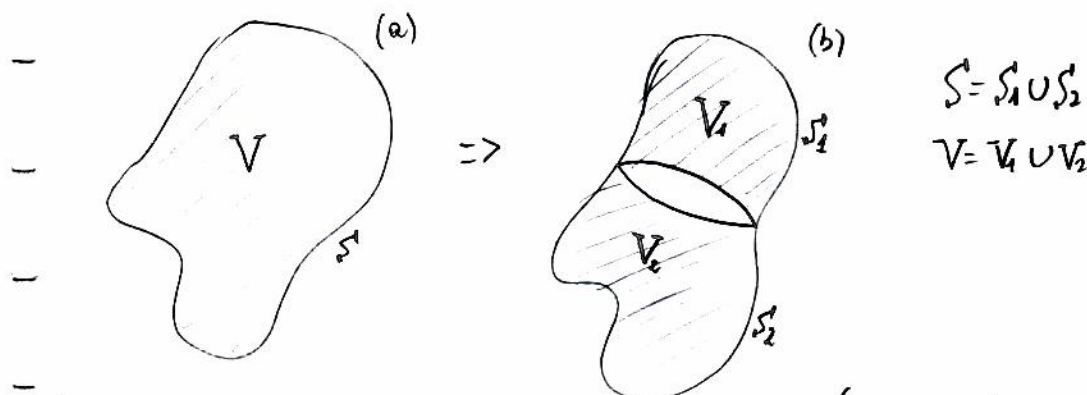
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

• divergenza di una funzione vettoriale

Consideriamo un volume finito V di forma qualsiasi delimitato da una superficie S . Il flusso della funzione \vec{F} attraverso la superficie S vale:

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Dividiamo ora il volume V in due parti in modo da ottenere due volumi V_1 e V_2 delimitati da due superfici S_1 e S_2 :



Per le superficie (b), il flusso di \vec{F} attraverso S vale: $\Phi = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2$

Generalizzando, se suddividiamo il volume in parti sempre più

piccole, otteniamo infiniti di superficie sempre più piccole: $\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$

L'obiettivo è quello di ottenere qualcosa che sia caratteristico di una regione molto piccola, ovvero una caratteristica locale o puntuale dello spazio. Avremo pertanto utile definire le seguenti quantità:

$\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$ / V_i : Tale rapporto tende, procedendo per divisioni successive del volume (e quindi delle superficie), ad un limite che costituisce una proprietà della funzione \vec{F} in quell'intorno e che prende il nome di divergenza di \vec{F} :

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$

Tale limite esiste ed è indipendente da come avviene la suddivisione dello spazio. Nelle pratiche $\text{div } \vec{F}$ è il flusso uscente da V_i per unità di volume nel caso limite in cui V_i è infinitesimo. La $\text{div } \vec{F}$ è una grandezza scalare ed è funzione delle coordinate x, y, z .

• Teorema della divergenza (o di Gauss-Ostrogradsky)

Consideriamo un dominio X e un volume V delimitato da una superficie S . Come fatto precedentemente per definire la divergenza, dividiamo il volume V in tanti piccoli volumetti ΔV_i delimitati dalle superficie ΔS_i . In queste operazioni di divisione siamo liberi di scegliere in maniera arbitraria le loro forme, purché il loro insieme costituisca una ripartizione del volume di partenza. Inconvenientemente nottoppiamo il numero di punti volumetti ed un processo limite si può ottenere ad ∞ (il che farà tendere a 0 i valori dei volumetti). Avremo quindi infiniti volumetti infinitesimi. Nelle definizioni di divergenza vale: \Rightarrow

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{\Delta V_i} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} \Delta V_i = \oint_{\Delta S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i \quad \left| \begin{array}{l} \Delta V_i = dV_i \\ \Delta S_i = dS_i \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV_i = \oint_{dS_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$

4

integrando su tutti i volumetti ΔV_i otteniamo: $\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

I° MEMBRO: integrale sul volume delle $\operatorname{div} \vec{F}$

II° MEMBRO: integrale sulla superficie (flussodel comp. vettoriale \vec{F}) otteniamo la superficie S che delimita V

Conclusione: Il th. della divergenza (o di Gauss-Ostrogradski) afferma che l'integrale delle divergenze di \vec{F} nel volume V è uguale al flusso di \vec{F} attraverso la superficie S che delimita il volume V .

• Divergenza in coordinate cartesiane: $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ ($\vec{A} \rightarrow$ comp. vettoriale)

Introducendo l'operatore nabla, definito come il vettore le cui componenti sono le derivate parziali rispetto ad x, y, z :

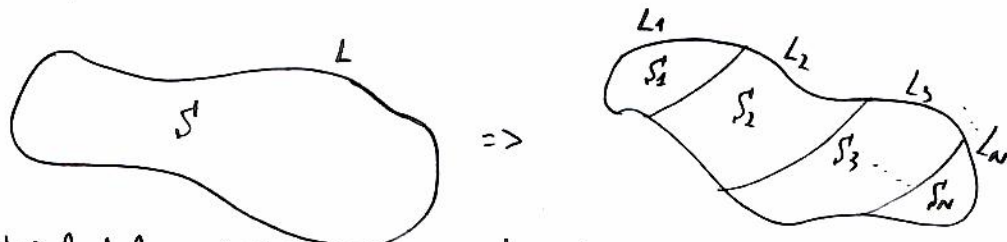
$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

possiamo scrivere l'espressione della divergenza di \vec{A} in forme cartesiane come il prodotto scalare fra il nabla e il comp. vett.

generico \vec{A} : $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

• Rotore di una funzione vettoriale

Consideriamo una superficie S delimitata da un perimetro chiuso L , ed una funzione vettoriale $\vec{F}(x, y, z)$:



Consideriamo l'integrale di linea di \vec{F} lungo il perimetro chiuso L :

$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, che prende il nome di circolazione. Anche in questo caso, suddividendo L in L_i sempre più piccoli, posso vedere la circolazione Γ come:

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_i \Rightarrow \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i$$

Per definire il rotore consideriamo il rapporto tra la circolazione e l'area ed esse coinvolte S , orientate dal verso \vec{u}_n , considerando normale ed uscente dalla superficie. Facendo tendere a 0 la superficie che circonda un certo punto P , otteniamo il seguente limite:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S}$$

Il limite che otteniamo è uno scalare associato al punto P nel comp. vettoriale \vec{F} e alla direzione \vec{u}_n . Lo possiamo considerare come il risultato di un vettore:

$$(\operatorname{rot}) \vec{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S}$$

nella pratica il rot \vec{F} è la circulatoria del camp. vettoriale \vec{F} lungo una linea chiusa molto piccola nel campo vettoriale in cui \vec{F} (le n superficie che si appoggia alle linee) ne infornitura. Il rotore è una funzione vettoriale, cioè l'ora funzione delle coordinate x, y, z .

• Teorema della circulatoria (o di Stokes):

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \left(\frac{\vec{F}_i}{S_i} \right) \quad \text{per } N \rightarrow \infty \quad \text{il termine fra parentesi tende a } \text{rot } \vec{F} \cdot \hat{u}_n:$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \left(\frac{\vec{F}_i}{S_i} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot (\text{rot } \vec{F}) \hat{u}_n \rightarrow \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

• Rotore in coordinate cartesiane:

$$(\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

• Gradiente

Se φ è un camp. scalare. Il gradiente del camp. scalare φ , indicato con $\text{grad}(\varphi)$, è il camp. vettoriale che in compo-
nenti non cartesiane parrebbe di φ rispetto a x, y, z : $\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi$

Il gradiente è fornito un vettore diretto secondo la massima variazione di φ e perpendicolare alle superfici in cui φ è costante.

• Gradiente in coord. cartesiane:

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k}$$

• Divergenza:

Se φ è un camp. scalare o vettoriale. Il grad. divergenza del camp. φ è la divergenza del gradiente di φ :

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi$$

• Divergenza in forme cartesiane:

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow \phi} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V} \quad (\text{divergenza})$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{th. di Gauss-Ostrogradskij})$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{divergenza in coord. cartesiane})$$

$$\text{rot } \vec{F} = \lim_{S \rightarrow \phi} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S} \quad (\text{rotore})$$

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{th. delle curve chiuse o di Stokes})$$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (\text{rotore in coord. cartesiane})$$

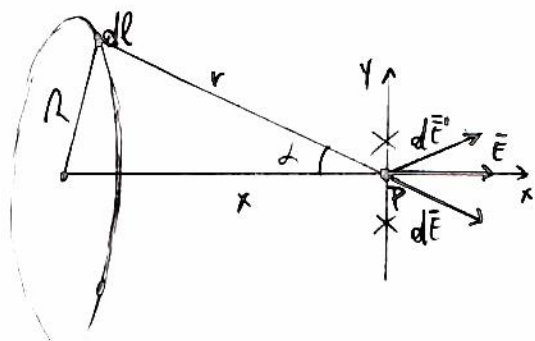
$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \quad \left(\begin{array}{l} \text{gradiente di un campo scalare} \\ \text{in coord. cartesiane} \end{array} \right)$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{laplaciano in coord. cartesiane} \end{array} \right)$$

CAMPI ELETTROSTATICI DI ALCUNE DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

7

① Campo elettrostatico generato da un anello uniformemente carico nei punti del suo asse:



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{x^2 + R^2} \cdot \hat{r}$$

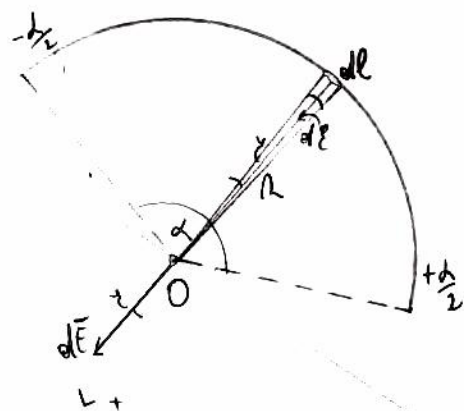
$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{x^2 + R^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$$d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dl \quad |\vec{E}_{tot}| = \int d\vec{E}_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R =$$

$$= \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Rx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (\text{lungo l'asse})$$

$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$

② Campo elettrostatico generato da un filo uniformemente carico, e finito di arco di circonferenza, nel suo centro.



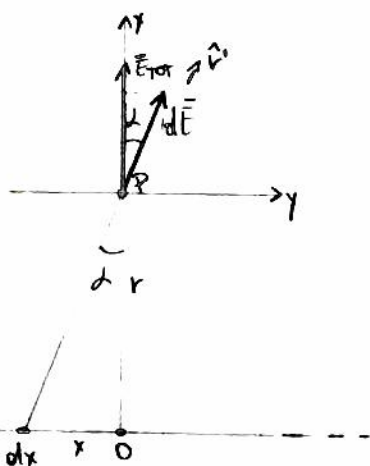
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad dl = R \cdot d\theta \quad dq = \lambda R \cdot d\theta$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cdot \hat{r} \quad d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{x}$$

$$d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda d\theta}{R} \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{x} \quad |\vec{E}_{tot}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \cos(\theta) \cdot d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

③ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico:



$$\lambda = \frac{dq}{dx} \quad dq = \lambda dx \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{x^2 + r^2} \cdot \hat{r}$$

$$|d\vec{E}_x| = d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{x^2 + r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dx$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx =$$

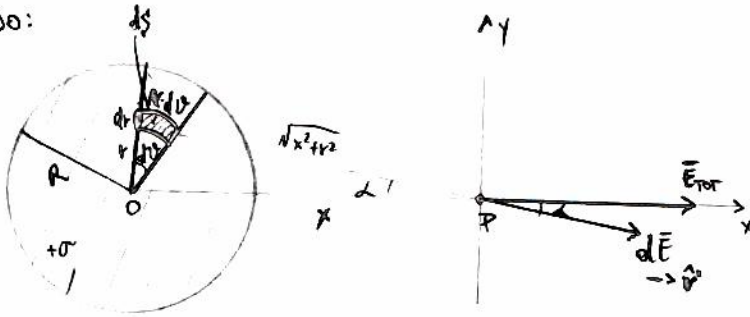
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} du \quad u = \frac{x}{r} \quad du = \frac{1}{r} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} du = \left[\frac{u}{1 + u^2} + \arctan(u) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

4) Campo elettrostatico prodotto da un disco uniformemente carico, nei punti del suo asse:

I° METODO:



$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad dq = \sigma \cdot dS \quad dS = r \cdot d\varphi \cdot dr \quad dq = \sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \hat{r}$$

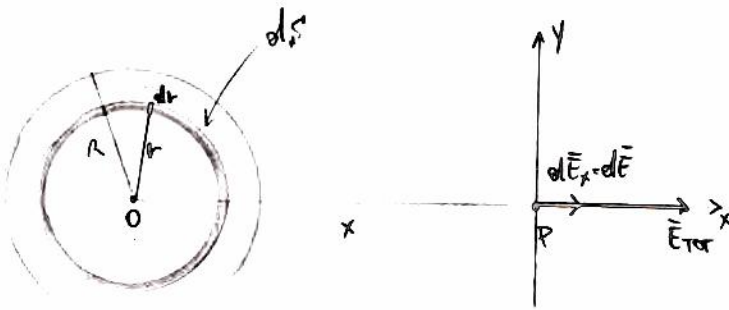
$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$d\vec{E}_y$ (si annulla per simmetria)

$$|d\vec{E}_x| = dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$|\vec{E}_{\text{tot}}| = E_{\text{tot}} = \int dE_x = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

II° METODO:

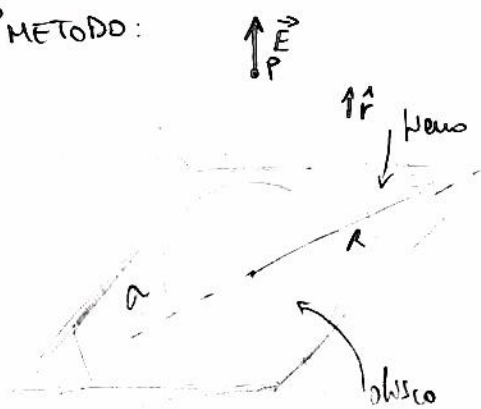


$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad dq = \sigma \cdot dS \quad dS = 2\pi r \cdot dr \quad dS \Rightarrow \text{elemento differenziale} \quad \lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{2\pi r} = \sigma \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \int d\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

5) Campo elettrostatico prodotto da un piano indefinito, uniformemente carico:

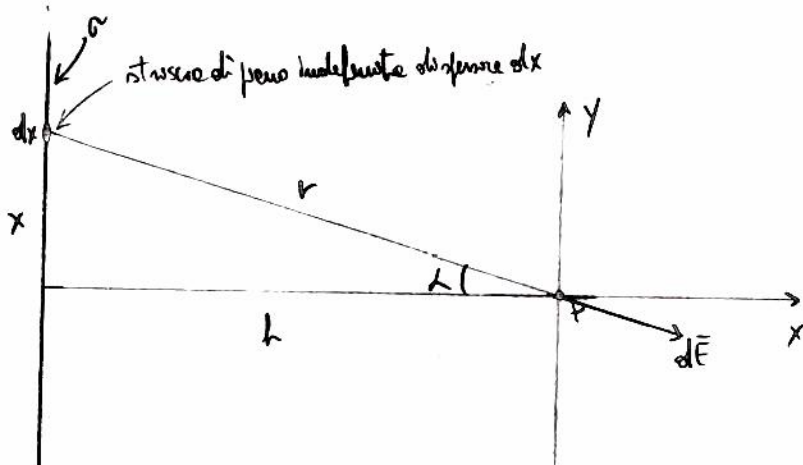
I° METODO:



Piano \rightarrow disco di raggio R che tende ad infinito

$$E = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{n}$$

con direzione perpendicolare al piano



La striscia di panno può essere considerata ed un filo rettilineo indefinito con: $d\lambda = \sigma dx$.

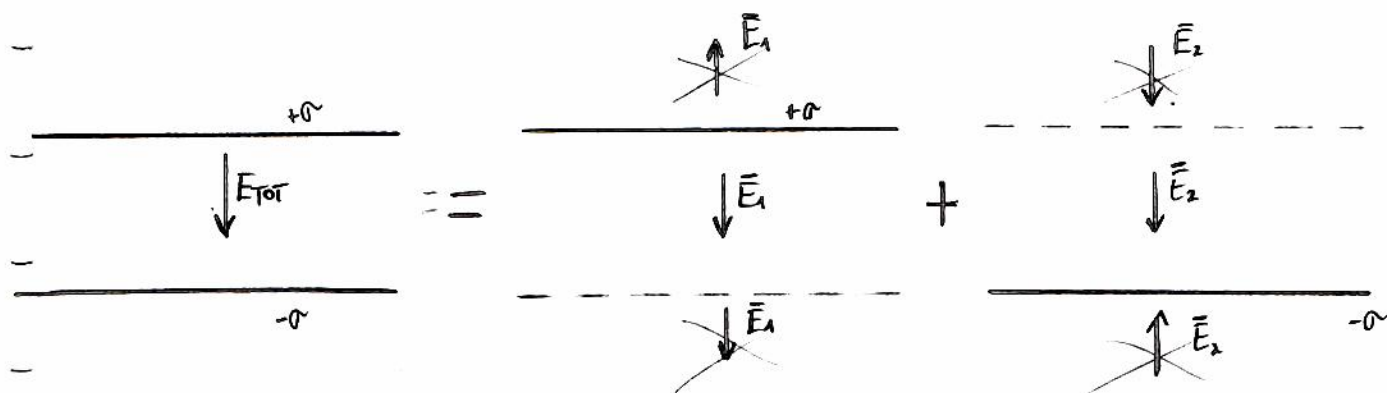
$$\vec{E} = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \hat{r} \quad \begin{cases} d\vec{E}_x = |\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} \\ d\vec{E}_y \text{ (si elide per simmetria)} \end{cases} \quad |\vec{E}_x| = dE_x = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\left| \begin{array}{l} x = h \cdot \tan(\alpha) \\ dx = h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ h = r \cos(\alpha) \Rightarrow r = \frac{h}{\cos(\alpha)} \end{array} \right.$$

$$d\lambda = \sigma dx = \sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad dE_x = \frac{\sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{h}{\cos(\alpha)}} \cdot \cos(\alpha) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} d\alpha$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dE_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \pi = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Il campo elettrostatico prodotto da due piani carichi uniformemente, indefiniti e paralleli:



$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad |\vec{E}_{\text{tot}}| = 2 \cdot |\vec{E}_1| = 2 \cdot |\vec{E}_2| = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{all'esterno dei piani: due campi non si annullano} \\ \text{ed opposti, si elidono} \end{array} \right)$$

Il campo è presente solo tra i due piani ed ha modulo pari a $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, direzione perpendicolare ai piani, e verso da quello carico positivamente (+sigma) a quello carico negativamente (-sigma)

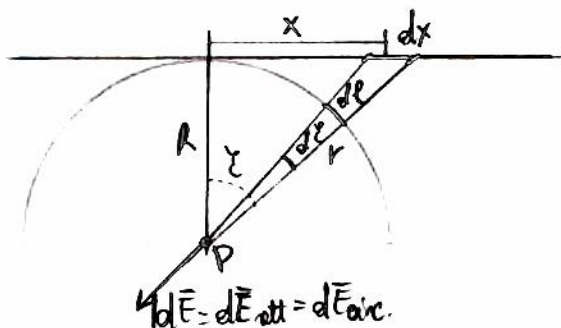
- ⑦ Equivalenza tra i campi elettrostatici prodotti da un filo rettilineo carico ed un filo a forma di arco di circonferenza, nel punto P, centro della circonferenza, con filo rettilineo Tendente ad esso.

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} = \frac{dQ}{dx} \quad dQ = \lambda dl = \lambda dx$$

I campi differenziali generati dalle cariche sugli elementi differenziali dx e dl devono essere uguali, in modulo, direzione e verso. Direzione e verso sono gli stessi (risultato facile) Abbiamo pu di dimostrare che:

$$|d\vec{E}|_{\text{rett}} = |d\vec{E}|_{\text{arc}} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{\lambda dl}{R^2}$$

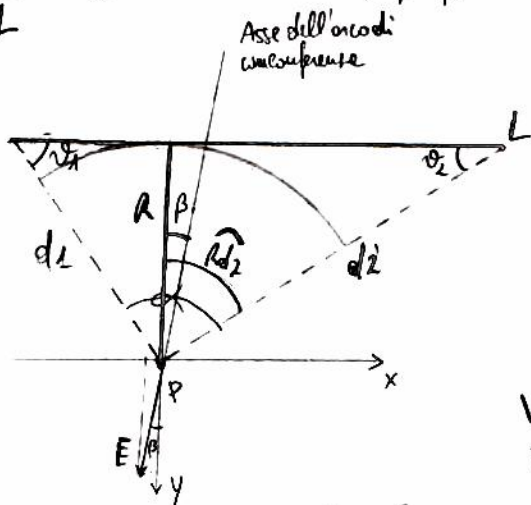


$$x = R \cdot \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 \theta} \cdot d\theta \Rightarrow R \cos^2 \theta \cdot dx = R \cdot dl \Rightarrow dl = dx \cdot \cos^2 \theta \quad (\text{moltiplico e divido per } \frac{\lambda}{R^2})$$

$$\frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{R^2} \cdot \cos^2 \theta \cdot dx \Rightarrow \frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{(R^2 \cos^2 \theta)} \cdot dx \rightarrow R = r \cos \theta \Rightarrow r = \frac{R}{\cos \theta} \rightarrow \boxed{\frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{r^2} \cdot dx} \text{ c.v.d.}$$

- ⑧ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo di lunghezza L, uniformemente carico.

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} = \frac{Q}{L} \quad R \rightarrow \text{distanza di P dal filo, raggio dell'arco con centro in P.}$$



Per quanto detto precedentemente c'è un'equivalenza tra il campo generato in P dal filo e quello generato in P dall'arco di circonferenza, e vale:

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \alpha \rightarrow \text{angolo al centro}$$

Voglio calcolare le componenti lungo x e lungo y del campo elettrostatico esprimendole in termini di R, $\alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2$

Determino il valore dell'ampiezza dell'angolo β :

$$(\text{considerando il triangolo } d_1 d_2 L) \quad \alpha = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (\text{considerando il triangolo } R d_2 L) \quad R d_2 = \pi - \frac{\alpha}{2} - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$$

$$\beta = R d_2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \left[\frac{\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \right] = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \left[\frac{\pi - \alpha_1 - \alpha_2}{2} \right] = \frac{\pi - 2\alpha_2 - \pi + \alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \quad (\text{spostamento } \sin(-\alpha))$$

$$\text{posso scrivere: } \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \text{per cui: } |\vec{E}| = E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \cos\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

Possiamo determinare le componenti del campo elettrostatico lungo gli assi x e y fissati, come:

$$|\vec{E}_x| = E_x = E \cdot \cos(\beta) \quad |\vec{E}_y| = E_y = E \cdot \sin(\beta) \quad \text{N.B. le componenti lungo l'asse x è negativa in quanto è diretta nel verso opposto a quello di orientazione dell'asse x}$$

• Determinazione delle componenti λ_x e λ_y del camp:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_2)]$$

Formule di prosteferi:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = \sin(p) - \sin(q), \text{ per cui:}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2)$$

• Determinazione delle componenti λ_x e λ_y del camp:

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

Formule di prosteferi:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos(p) + \cos(q), \text{ per cui:}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

N.B.: Le componenti λ_x e λ_y possono essere scritte come:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_2)]$$

per il triangolo Δ dei v. $R = d_1 \cdot \sin(\vartheta_1)$ e $R = d_2 \cdot \sin(\vartheta_2)$
 per cui: $\sin(\vartheta_1) = \frac{R}{d_1}$ e $\sin(\vartheta_2) = \frac{R}{d_2}$

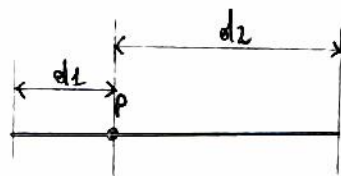
per cui:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \left[\frac{R}{d_1} - \frac{R}{d_2} \right] = \boxed{-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$$

Risultando: $\vec{E} = \begin{cases} |\vec{E}_x| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ |\vec{E}_y| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) \end{cases}$

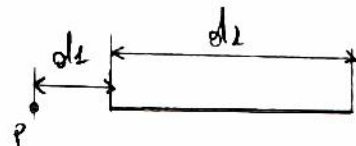
• Caso limite

- P. si trova sul filo $\begin{cases} R = \phi \\ \vartheta_1, \vartheta_2 = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \infty \end{cases}$



- P. si trova sulla retta del filo, ma esternamente ad esso

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \phi \end{cases}$$



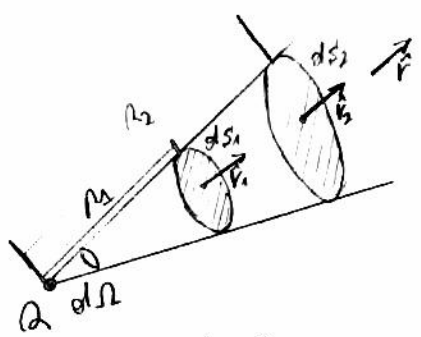
TEOREMA DI GAUSS

12

Primo caso: Flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme attraverso due superfici che sottendono un angolo solido.

- $d\Omega \rightarrow$ angolo solido $dS_1, dS_2 \rightarrow$ superfici \hat{r}_1, \hat{r}_2 vettori di orientamento delle superfici
- $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \rightarrow$ vettori del campo elettrico che attraversano le superfici

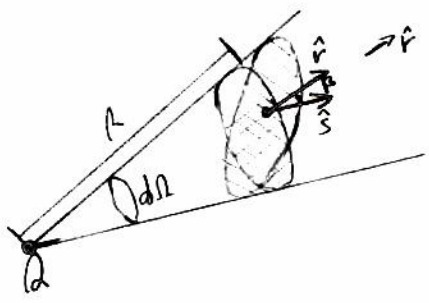
1° caso: le superfici elementari dS_1 e dS_2 sono perpendicolari alla raddiante \vec{r} , e distanze diverse da Q .



$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \text{direzionale radiale} \\ \hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \hat{r} \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R_1^2} \cdot \hat{r} \quad d\vec{S}_1 = dS_1 \cdot \hat{r} \\ d\vec{S}_2 = dS_2 \cdot \hat{r} \\ d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R_1^2} \cdot \hat{r} \cdot d\vec{S}_1 \quad |d\vec{S}_1| = d\Omega \cdot R_1^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow d\phi_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R_1^2} \cdot d\Omega \cdot R_1^2 \Rightarrow d\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot d\Omega \end{aligned}$$

$d\phi_1$ è indipendente dalla distanza, perciò: $d\phi_1 = d\phi_2, \forall R_1, R_2$

2° caso: le superfici elementari dS_1 e dS_2 si trovano alla stessa distanza R dalla carica Q , ma sono orientate come \hat{r} ed \hat{s} :

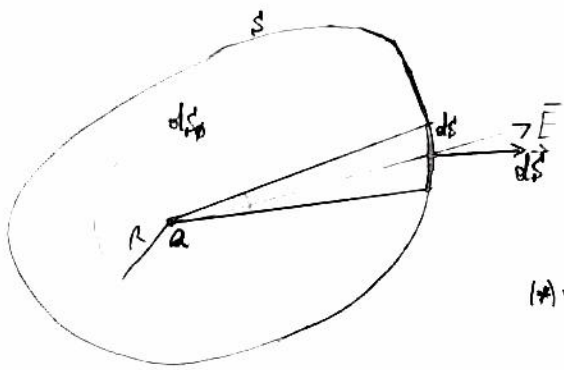


$$\begin{aligned} d\vec{S}_1 &= dS_1 \cdot \hat{r} \quad d\vec{S}_2 = dS_2 \cdot \hat{s} \\ \vec{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot \hat{r} \quad d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_1 \\ d\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_2 \cos(\theta) \\ dS_1 &= dS_2 \cdot \cos(\theta) \quad d\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_1 \Rightarrow d\phi_1 = d\phi_2 \end{aligned}$$

Il flusso, fissato l'angolo solido $d\Omega$, non dipende né dalla distanza né dall'orientamento delle superfici elementari.

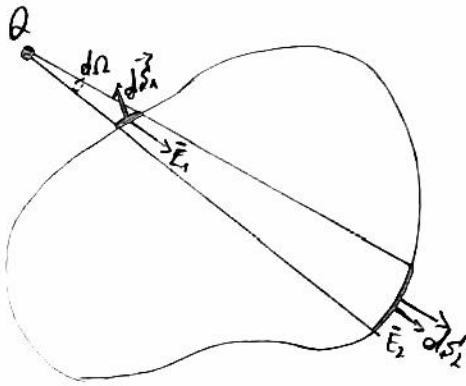
• Teorema del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme Q attraverso una qualunque superficie chiusa S' , orientata verso l'esterno:

1° caso: CARICA INTERNA ALLA SUPERFICIE S'



$$\begin{aligned} \phi_e(dS_0) &= \phi_e(dS') \\ \phi_e(S) &= \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \phi_e(dS_0) = \phi_e(S) = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

(*) vedi appendice dietro



$$\varphi_E(S_1) = -\varphi_E(S_2) \Rightarrow \varphi_E(S) = 0$$

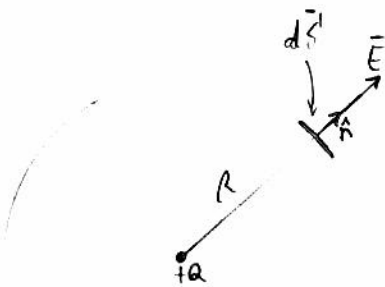
I risultati a cui siamo pervenuti possono essere generalizzati per ogni superficie chiusa attraverso il th. di Gauss:

Il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa, orientata verso l'esterno, è uguale alla somma algebrica delle cariche interne alla superficie, diviso la costante dielettrica del vuoto:

$$\varphi_E(S) \Big|_{\text{chiusa}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Q_{int} è la carica interna netta: se non presenti cariche la cui somma è nulla allora la carica interna netta è nulla.

APPENDICE - FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA $+Q$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA RAGGIO R , ORIENTATA VERSO L'ESTERNO, CENTRATA SULLA CARICA



$$\varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \oint_S d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi R^2$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$$

$$\varphi_E(S) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \boxed{\frac{Q}{\epsilon_0}}$$

È possibile calcolare il campo elettrostatico generato da una distribuzione di cariche continue applicando i risultati di Gauss del campo elettrostatico e il teorema di Gauss. I passi da seguire sono i seguenti:

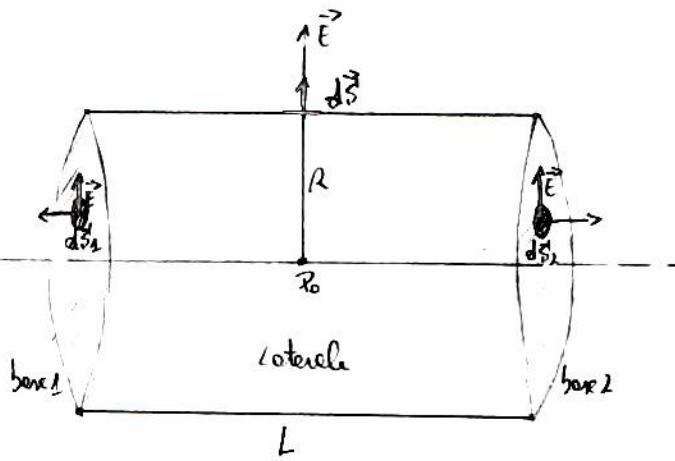
- Individuare la distribuzione continua di cariche e il punto in cui calcolare il campo elettrostatico,
- Scegliere una superficie Gaussiana, ovvero una qualsiasi superficie chiusa che contenga la distribuzione di cariche ed il punto in cui si calcola il campo elettrostatico (le scelte si eseguono anche in base alle simmetrie del problema),
- Calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso la definizione di flusso: $\Phi_E(S) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$
- Calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso il th di Gauss: $\Phi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0}$
- Equilibrare i due termini e ricavare l'espressione del campo elettrostatico

CALCOLO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA ALCUNE CONFIGURAZIONI (DISTRIBUZIONI CONTINUE) DI CARICA UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS

1. CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN FILA RETTILINEA INDEFINITA, UNIFORMEMENTE CARICA:

Il campo elettrostatico generato da un filo rettilineo infinito, uniformemente carico:

Scegliamo una superficie Gaussiana cilindrica di raggio R e lunghezza L .



$$\Phi_E(S) = \int_{base 1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{base 2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{laterale} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

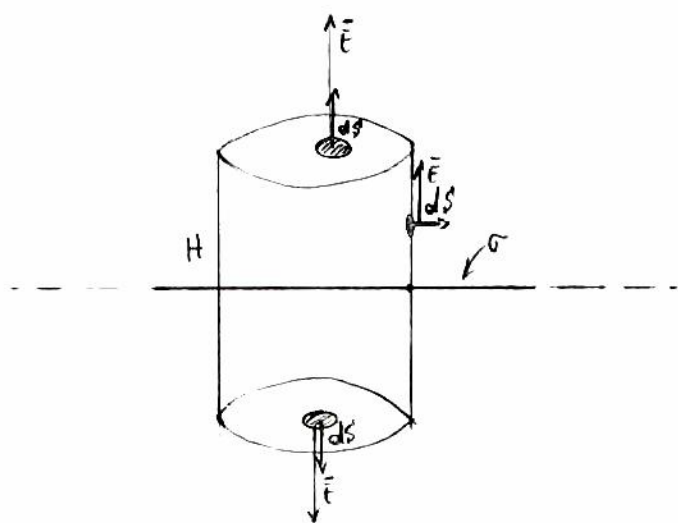
$$\int_{base 1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{base 2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{I vettori } \vec{E} \text{ e } d\vec{S} \text{ sono perpendicolari, per cui} \\ \text{infinitesimale } d\vec{S}, \text{ quindi il loro prod. scalare } \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ } \end{array} \right]$$

$$\Phi_E(S) = \int_{laterale} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \vec{E} \text{ uniforme} \Rightarrow \Phi_E(S) = \vec{E} \cdot \int_{laterale} d\vec{S} = E \cdot 2\pi R \cdot L$$

$$\Phi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0}, \quad Q_{INT} = \lambda \cdot L \Rightarrow \Phi_E(S) = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \Phi_E(S) = E \cdot 2\pi R \cdot L \\ \Phi_E(S) = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E \cdot 2\pi R \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R}$$

② Camp elettrostatico generato da un filo indefinito, uniformemente carico



$$\varphi_e(S) = \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \phi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni superficie elementare della superficie laterale} \\ \text{del cilindro, il vettore di orientamento della superficie} \\ \text{è ortogonale a quello del campo elettrico, per cui il} \\ \text{prodotto scalare è sempre nullo} \end{array} \right.$$

$$\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \left(\begin{array}{l} \text{il campo elettrostatico è uniforme e} \\ \text{le superfici di base sono uguali} \end{array} \right)$$

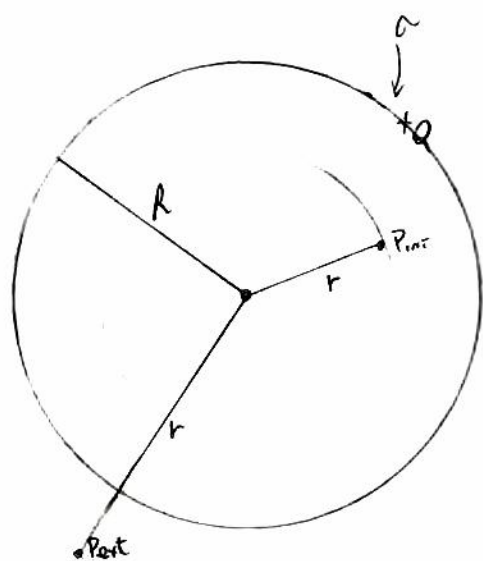
$$\varphi_e(S) = 2 \cdot \int_{\text{base}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot E \int_{\text{base}} dS = 2 \cdot E \cdot S_b$$

$$\varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_e(S) = 2 \cdot E \cdot S_b \\ \varphi_e(S) = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0} \end{array} \right. \Rightarrow 2 \cdot E \cdot S_b = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

③ Camp elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica



p.to p interno alla sfera $\rightarrow r < R$

p.to p esterno alla sfera $\rightarrow r > R$

$$\sigma \text{ uniforme} = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

I° caso - P_int interno alla sfera (scegli una superficie sferica concentrica S' con raggio $r < R$ passante per il punto P_int e calcola il flusso del campo elettrostatico)

$$\varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\text{INT}} = \phi \quad \varphi_e(S) = \phi \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_e(S) = \phi \\ \varphi_e(S) = E \cdot 4\pi r^2 \end{array} \right. \Rightarrow E = \phi$$

$$\varphi_e(S) = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

Il campo elettrostatico è nullo in tutti i punti interni alla sfera

II° caso - P_ext esterno alla sfera (scegli una superficie sferica concentrica S' con raggio $r > R$ passante per il punto P_ext e calcola il flusso del campo elettrostatico)

$$\varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

$$\varphi_e(S) = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} \\ \varphi_e(S) = E \cdot 4\pi r^2 \end{array} \right. \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{\text{INT}}}{r^2}$$

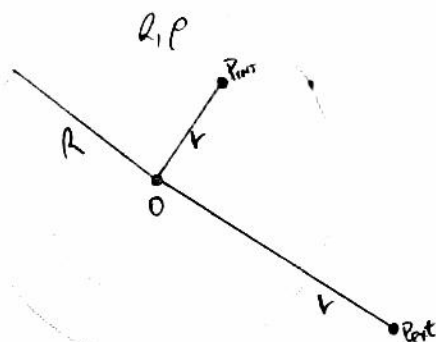
Assipilofendo:

16

$$E = \begin{cases} 0, & r < R, \text{ interno delle sfere} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R, \text{ esterno delle sfere} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno delle sfere il campo si comporta come se le cariche fossero tutte concentrate nel centro.

Il campo elettrostatico di una carica uniformemente distribuita in una sfera



1° caso - $r < R$ (interno sfere)

$$\begin{aligned} \Phi_E(S) &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} & \Phi_E(S) &= E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \\ \begin{cases} \Phi_E(S) &= \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \\ \Phi_E(S) &= E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} & \Rightarrow & \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} r \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \right. \end{aligned}$$

2° caso - $r > R$ (esterno sfere)

$$\begin{aligned} \Phi_E(S) &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} & \Phi_E(S) &= E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \\ \begin{cases} \Phi_E(S) &= \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \\ \Phi_E(S) &= E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} & \Rightarrow & \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} & \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right. \end{aligned}$$

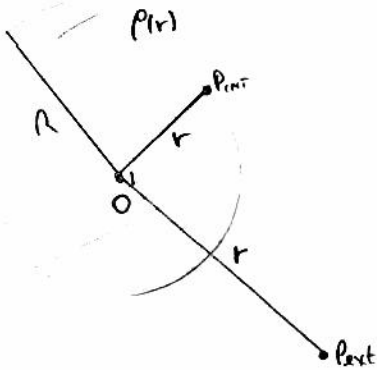
Assipilofendo:

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r, & r < R, \text{ interno delle sfere} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R, \text{ esterno delle sfere} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno delle sfere il campo si comporta come se le cariche fossero tutte concentrate nel centro.

⑤ Camp elettrostatico di una carica Q distribuita in una sfera d'raggio R con densità volumica $\rho(r)$.

17



$$Q = \int_0^R \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

I° caso - $r < R$ (interno sfera)

$$\varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 \quad \varphi_E(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \varphi_E(S) = E \cdot 4\pi r^2 \\ \varphi_E(S) = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

II° caso - $r > R$ (esterno sfera)

$$\varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 \quad \varphi_E(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^R \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \varphi_E(S) = E \cdot 4\pi r^2 \\ \varphi_E(S) = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{Q}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Risultando:

$$E = \begin{cases} \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{r^2}, & r < R, \text{ interno sfera} \\ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R, \text{ esterno sfera} \end{cases}$$

N.B.: Anche per la distribuzione di carica sferica si può calcolare il campo elettrico con la legge di Gauss.

Distribuzione delle cariche elettriche in un conduttore isolato

18

- Se somministriamo ad un conduttore una carica Q , dopo un certo tempo il sistema raggiungerà una configurazione di equilibrio: in qualsiasi volume elementare all'interno del conduttore non c'è più carica in movimento, perciò:

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{E} \quad \vec{E} = 0 \text{ (qualunque)} \quad \rho \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$$

Il campo elettrostatico è nullo in ogni punto interno del conduttore

- Consideriamo ora una superficie S , interna al conduttore. Vogliamo determinare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S utilizzando direttamente la densità di carica e il Teorema di Gauss:

$$\Phi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{per punto detto in precedenza il campo elettrostatico} \\ \text{è nullo all'interno del conduttore, perciò:} \end{array} \right. \Rightarrow \Phi = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{INT} = \Phi$$

- Concludo che la carica interna ad S è nulla. Per una tale considerazione solo per qualsiasi superficie S interna al conduttore, allora le cariche somministrate non può che trovarsi sulle superficie esterna del conduttore, distribuite con una densità superficiale σ che, in generale, varia da punto a punto della superficie del conduttore.

Teorema di Coulomb

- Consideriamo un conduttore carico con una densità di carica superficiale σ . Vogliamo determinare il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un punto P della superficie del conduttore.

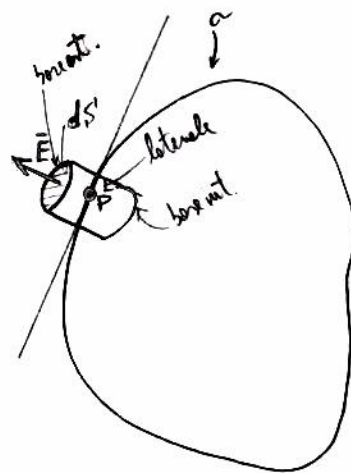
Il campo risulta perpendicolare al piano tangente alla superficie del conduttore nel punto P ed orientato verso l'esterno se σ è positiva in quel punto. Applicheremo il teorema di Gauss ad un cilindro elementare di base dS ed altezza infinitesima, disposto perpendicolarmente al piano tangente:

$$\Phi_E(P) = \cancel{\Phi_{base\ est.}} + \cancel{\Phi_{base\ int.}} + \Phi_{laterale} \Rightarrow \Phi_E(P) = \Phi_{base\ ext.}$$

$$\Phi_E(dS) = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$$

$$Q_{INT} = \sigma dS$$

$$\Phi_E(dS) = E \cdot dS = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \sigma dS \Rightarrow E \cdot dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$



Abbiamo così il teorema di Coulomb:

- Il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze del punto P della superficie di un conduttore vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma \rightarrow \text{densità superficiale di carica in } P \\ \hat{n} \rightarrow \text{vettore della normale uscente dal conduttore in } P (\perp \text{ al piano tangente in } P) \end{array} \right.$$

- Consideriamo il camp elettrostatico generato da una qualsiasi distribuzione di cariche. Inducendo con L una linea chiusa qualunque, la circolazione del camp lungo di essa risulta essere nulla:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{La circolazione di un camp vettoriale è nulla se e solo se il camp vettoriale è conservativo.} \\ \text{Per conseguenza, possiamo affermare che il camp elettrostatico è conservativo.} \end{array} \right.$$

- Consideriamo una distribuzione continua di carica ρ e fissiamo una superficie chiusa S , che recalchi il vol. V . Per il th. di Gauss:

$$\varphi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ Q_{INT} = \int_V \rho dV \end{array} \right. \Rightarrow \overset{(1)}{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \overset{(2)}{\int_V \rho dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0}} \quad \left| \begin{array}{l} (1) \text{ per il th. della divergenza:} \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV = \int_V \rho dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{TH. DI GAUSS IN FORMA LOCALE}$$

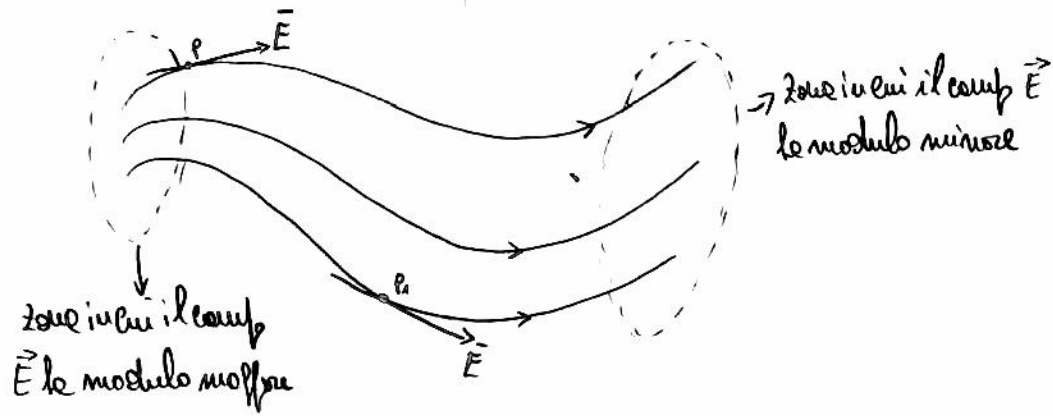
$$\bullet \text{ Camp elettrostatico conservativo} \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rot} \vec{E} = 0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{Th. di Stokes} \end{array}$$

Se il rotore di un camp vettoriale è nullo si dice che il camp è irrotazionale. Un camp vettoriale conservativo è irrotazionale. Il camp elettrostatico è quindi conservativo, in quanto la sua circolazione lungo una qualsiasi linea chiusa L è nulla; in altre parole la conservatività si esprime dicendo che \vec{E} è irrotazionale, ovvero $\text{rot} \vec{E} = 0$.

In breve:

- Il camp elettrostatico è nullo in tutti i punti interni ad un conduttore carico;
- La carica accumulata ad un conduttore si distribuisce lungo la sua superficie con una densità superficiale di carica σ , in genere variabile (NFI);
- Per il th. di Coulomb, il camp elettrostatico in un pto P nella immediata vicinanza di un conduttore carico è pari a: $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n}$, dove \hat{n} è il vettore perpendicolare al punto P sulla superficie per cui il pto P considerato;
- Il camp elettrostatico \vec{E} è conservativo, in quanto la sua circolazione lungo una qualsiasi linea chiusa L è nulla: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$;
- Il th. di Gauss è esprimibile in forma locale in termini di divergenza: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;
- È possibile esprimere in forma locale anche la conservatività del camp elettrostatico utilizzando l'operatore differenziale rotore: $\text{rot} \vec{E} = 0$.

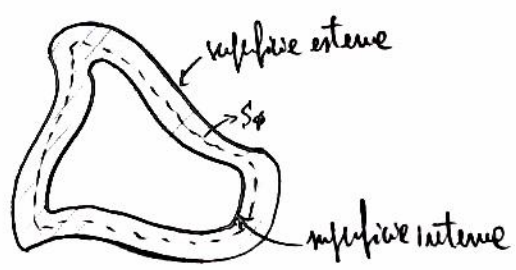
- Rappresenteremo un metodo per determinare il campo elettrostatico generato da una qualsiasi distribuzione di cariche. Essi sono distribuiti in modo che in ogni punto delle linee il campo elettrostatico risulta tangente ed esce:



- Le dove le linee sono più fitte l'intensità del campo è maggiore, dove sono più distanziate l'intensità del campo è minore
- La direzione del campo in un punto P appartenente alle linee di flusso è quella del punto tangente alle linee nel punto considerato, con verso uguale a quello delle linee stesse
- Per un punto passano una ed una sola linea di flusso, una sola volta

SISTEMA ELETTROSTATICO

- Si consideri un conduttore cavo. Appena fuori punto una certa carica, presente in distribuzione sulla sua superficie esterna con densità σ . Analizziamo ciò che accade all'interno della cavità:



Si consideri una superficie S_0 contenuta nel conduttore (tra le superfici interne ed esterne), sapremo che il campo elettrostatico è nullo, per il t.h. di Gauss:

$$\oint_C(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{int} = 0$$

Quindi le cariche interne sulle superfici S_0 è nulla. Ciò però non esclude che possano trovarsi, sulle superfici interne, delle cariche positive e negative tali per cui la loro somma sia nulla. Dimosteremo che non si possono presentare situazioni.

- Consideriamo lo stesso conduttore cavo ed una linea L che si estende per una parte nel conduttore (tra le due superfici) e per una parte nella cavità. Ipotesi: la presenza di cariche sulle superfici interne del conduttore non c'è.



Il contributo alle cariche dovuto alla parte delle linee interne al conduttore (tra le 2 superfici) è nullo, dato che il campo elettrico è nullo; ma il contributo dato alle parti delle linee interne alla cavità non è diverso da $\oint E \cdot dl = \phi$ (se non presenti sulle linee, ϕ è un campo elettrico). Per cui si avrà:

$\oint_L E \cdot dl \neq 0$, che è impossibile, dato che E è conservativo e vale: $\oint_L E \cdot dl = 0$

• Quindi non vi è alcuna carica sulla superficie interna del conduttore. 24

• Se all'interno c'è un conduttore con carica $+Q$, sulla superficie interna della cavità si distribuisce una carica

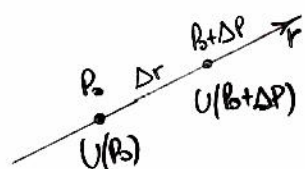
- Q . Tale situazione di induzione non viene in nessun modo modificata da quanto vi è all'esterno.

Infine, la cavità funziona da schermo elettrostatico: conserva inalterate le situazioni di equilibrio interno contro qualsiasi carica esterna.

• Se U una funzione scalare definita in una regione Ω dello spazio, l'insieme dei valori assunti da U in ogni punto P di Ω costituisce un campo scalare. Un campo scalare è quindi una funzione scalare del punto, indicata dalle coordinate cartesiane x, y, z ;

• Se A una funzione vettoriale definita in una regione Ω dello spazio, l'insieme di vettori (vettori) assunti da A in ogni punto P di Ω costituisce un campo vettoriale

Se $U = U(P)$ una funzione scalare definita in una regione Ω dello spazio, lungo una generica direzione indicata dalle coordinate del vettore r , nel passare dal punto P_0 al punto $P_0 + \Delta P$ la funzione passa dal valore $U(P_0)$ al valore $U(P_0 + \Delta P)$, con $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$:



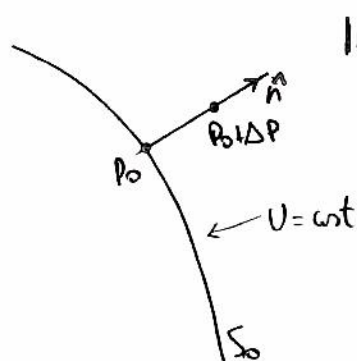
Si definisce derivata direzionale della funzione U nel punto P_0 lungo la direzione r :

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{U(P_0 + \Delta P) - U(P_0)}{\Delta r}$$

se il lim esiste ed è finito

• La derivata direzionale di una funzione scalare rappresenta quindi la variazione di un campo scalare lungo la direzione e l'intensità di un vettore

• Se S_0 una superficie immerse in un campo scalare U , costante in tutti i punti di S_0 . Rappresento \hat{n} il vettore normale a S_0 orientato nel verso dei valori crescenti di U , si sceglie un punto P_0 di S_0 e una distanza ΔP da P_0 tale che: $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$ lungo la direzione \hat{n} :



$$|\hat{n}| = 1 (\text{norma})$$

Il gradiente di U in P_0 è il vettore diretto lungo \hat{n} che ha per modulo la derivata direzionale di U lungo \hat{n} :

$$\vec{\text{grad}}(U)|_{P_0} = \hat{n} \cdot \left. \frac{dU}{dr} \right|_{P_0}$$

• Effettuando il gradiente in tutti i punti di Ω si definisce il campo vettoriale $\vec{\nabla}U$.

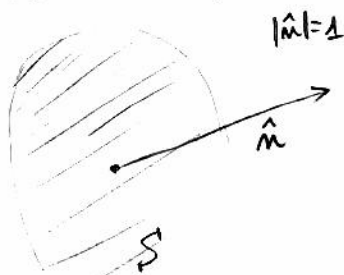
• Noto il gradiente è possibile individuare la derivata direzionale lungo qualsiasi direzione

• La direzione del gradiente di un campo scalare è solitamente scelta come quella di massima variazione delle funzione U , ovvero la direzione lungo la quale è massima la derivata direzionale della funzione

• Se $A = \nabla U$, allora la funzione scalare U è definita potenziale della funzione vettoriale A . 23

• Considerando le derivate direzionali di una costante nulla, allora possiamo definire un altro campo scalare P definito come $P = U + U_0$, con U_0 costante, è un potenziale per A : $P = U + U_0$ $\nabla P = \nabla U = A$ (la costante non altera il valore delle derivate)

• Se \vec{A} un campo vettoriale definito in uno spazio Ω ed S una superficie aperta immersa in Ω . Rappresento \hat{n} come il vettore normale uscente da S :

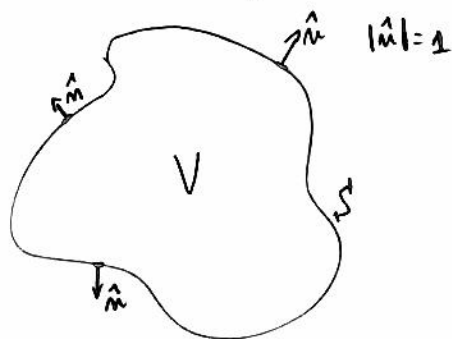


Rappresento il flusso Ψ_S del campo vettoriale \vec{A} attraverso la superficie

$$S \text{ come } \Psi_A(S) = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\Psi_A(S) = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S \vec{A}_n \, dS = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

• Consideriamo ora una superficie chiusa S immersa in Ω , con la normale uscente dal volume V :

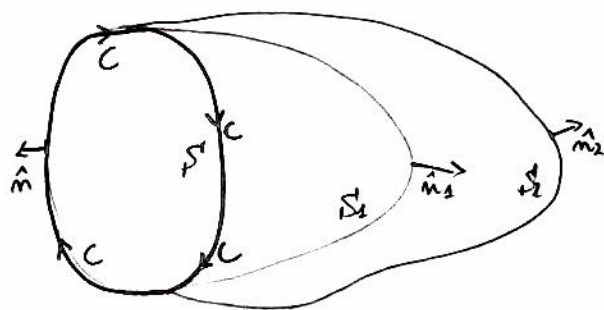


Il flusso attraverso la superficie chiusa S del campo vettoriale

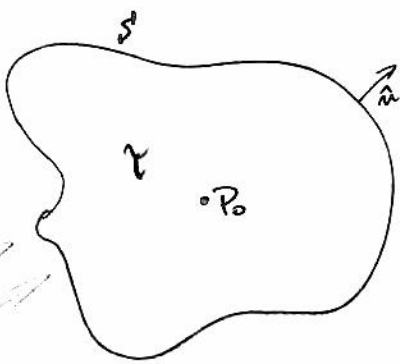
$$\vec{A} \text{ è: } \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

• Se $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = 0$ allora deduce che \vec{A} è conservativo nel flusso

• Se un campo vettoriale \vec{A} è conservativo, il flusso attraverso tutte le superfici aperte delimitate da una stessa curva chiusa C ha lo stesso valore:



- Se S è una superficie chiusa, contenente il volume γ , immersi in un campo vettoriale A e un punto P_0 interno ad essa:



La densità divergenza di A in P_0 è data da:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \emptyset} \frac{\oint_{\gamma} A \cdot n \, dS}{\gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{P_0}$$

La divergenza è definita prendendo collassare il volume γ nel punto P_0

- La divergenza rappresenta un flusso uscente dall'unità di volume. Integrandolo su tutto il volume, quindi, si ottiene che il flusso uscente dall'intera superficie chiusa che racchiude il volume in cui la divergenza è stata calcolata,

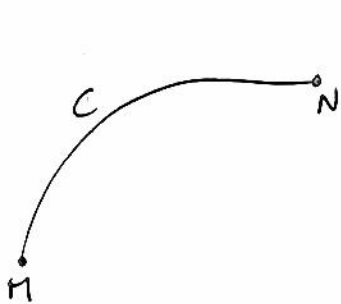
- Le superficie precedentemente enumerate se sotto il nome di teorema di Gauss:

$$\iiint_{\gamma} \nabla \cdot \vec{A} \, d\tau = \oint_{\gamma} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

vale:

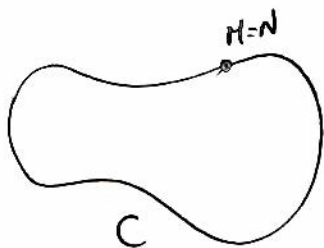
l'integrale della divergenza di A sul volume γ è uguale al flusso di A lungo la superficie

- Consideriamo un campo vettoriale A definito su Ω e C una curva in esso contenuta. Assumendo un verso di percorrenza su C , definiamo l'integrale curvilineo:



$$I = \int_M^N \underline{A} \cdot \underline{l} \, d\ell$$

- Se la curva è chiusa, $M=N$:

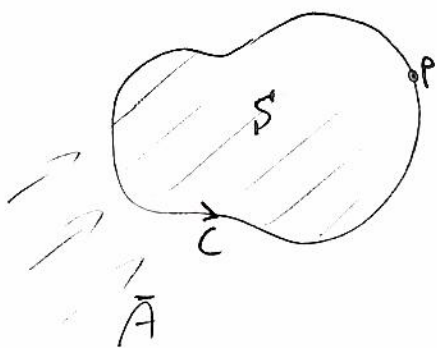


$$\int_M^N \underline{A} \cdot \underline{l} \, d\ell = \oint_C \underline{A} \cdot \underline{l} \, d\ell$$

che rappresenta la circuitazione del campo A lungo la linea chiusa C .

Quindi la circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa è l'integrale del campo lungo la linea.

- Consideriamo una funzione vettoriale A (camp vettoriale) definita in uno spazio \mathbb{R}^3 e una linea chiusa C che delimita una superficie S :



lavoro fatto sul C da A è: $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

definisco: $\lim_{S \rightarrow \emptyset} \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}{S} = \text{rot}(\vec{A})$

il rotore può essere visto come una densità di lavoro in un'area di superficie

- Vali il Th. di Stokes (o della circolazione):

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Per una funzione conservativa si definisce il lavoro come la differenza di energia potenziale ($U_A - U_B$). Per un campo di forza conservativo la funzione scalare se sotto il nome di potenziale (P.M.A) che, nel caso del campo elettrostatico è definito potenziale elettrostatico V

Nota la corrispondenza tra il campo elettrostatico vettoriale \vec{E} e il campo scalare potenziale elettrostatico V , è possibile descrivere lo stesso fenomeno fisico in termini di campo elettrostatico o di potenziale elettrostatico.

In breve:

$$\vec{F}_e = - \text{grad } U(x, y, z) \longrightarrow \vec{E} = - \text{grad } V(x, y, z)$$

$$\text{grad } V = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad \vec{E} = - \text{grad}(V) = - \vec{\nabla} V$$

La relazione inversa che permette di passare dal campo vettoriale \vec{E} e quello scalare V è data da integrali.

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Eseguendo il calcolo integrale del campo elettrostatico si possono calcolare la differenza di potenziale ($V_A - V_B$) tra il p.to di partenza e il p.to di arrivo. In base a come si scelgono i punti A e B si hanno infiniti potenziali di

\vec{E} . È possibile fissare, ad esempio, un p.to di partenza A, facendo variare B in tutto lo spazio. In questo modo si otterrebbe un unico campo scalare, ovvero come varrebbe il potenziale da A a tutti i punti dello spazio.

Scegliendo più il p.to A, si ottiene un nuovo campo scalare potenziale.

In altre parole, il potenziale è definito e meno di una costante.

Il fatto che il potenziale non è definito e meno di una costante non altera in nessun modo il valore del campo elettrico, in quanto la presenza delle costanti non altera in nessun modo il valore del gradiente.

In BREVE:

Essendo \vec{E} un campo conservativo, esso è esprimibile come il gradiente di un campo scalare: $\vec{E} = - \text{grad } V$.

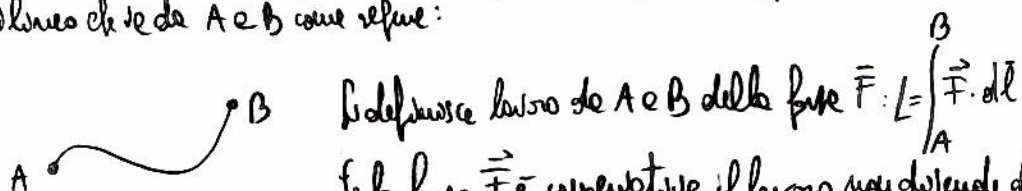
Il campo scalare V è definito potenziale elettrostatico, che rappresenta il lavoro per unità di carica compiuto da

\vec{E} per spostare, fissando, una carica tra due punti dello spazio.

La funzione potenziale è definita e meno di una costante arbitraria.

PREMESSA MATEMATICA 2: DESCRIZIONE DI FORTE CONSERVATIVE: (\vec{F} conservativa) (28)

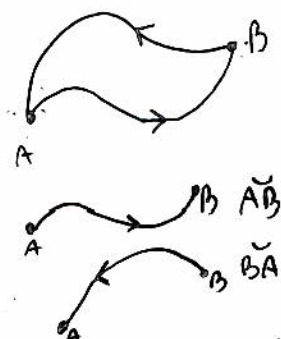
- Consideriamo una forza \vec{F} funzione dello spazio e due punti di applicazione A e B di \vec{F} . Possiamo definire un percorso qualsiasi che va da A a B come segue:



Si definisce lavoro da A a B della forza \vec{F} : $L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Se la forza \vec{F} è conservativa il lavoro non dipende dallo specifico percorso ma delle posizioni dei punti A e B.

- Questo è dimostrabile partendo dal concetto di conservatività di una forza: $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, $\forall L$ chiuso, in Ω
- Si vuol dire che, considerando un altro percorso alternativo da A a B, in base ad un unico percorso P del tipo \overline{ABA} chiuso per lui solo:



$\oint_{ABA} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, ma: $\overline{ABA} = \overline{AB} \cup \overline{BA}$, cioè:

$$\oint_{ABA} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Essendo facile rilevare subito per qualsiasi percorso alternativo \overline{BA} scelto, allora l'integrale è indipendente dal percorso.

Il lavoro da A a B di una forza conservativa è quindi esprimibile come la differenza di una funzione in A e in B:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = U_A - U_B$$

La funzione U si detta il nome di energia potenziale legata alla forza.

DEFINIZIONE DEL POTENZIALE ELETTROSTATICO

1. Le considerazioni in P.H. 1 un campo vettoriale è esprimibile attraverso un campo vettoriale attraverso la relazione

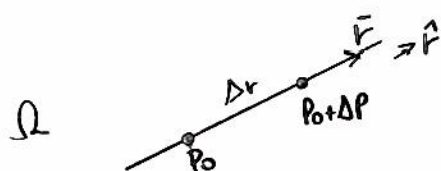
$\vec{A} = \vec{\nabla} U$. Ciò è valido anche per il campo elettrostatico \vec{E} , anch'esso esprimibile come il gradiente di una funzione scalare V che è definita potenziale elettrostatico: $\vec{E} = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla}(V)$.

Un'idea più intuitiva dimensionale ricordando quanto detto nella P.H. 2: Abbiamo parlato di una funzione forza \vec{F} , ma ora veniamo in presenza di un campo (\vec{E}) che è una forza per unità di carica. Per tale motivo, parleremo di lavoro per unità di carica:

$$\frac{L}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B \quad \text{e} \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

PREMESSA MATEMATICA: PASSAGGIO DA UN CAMPO SCALARE AD UN CAMPO VETTORIALE

- Se U una funzione scalare definita in una regione Ω dello spazio; l'insieme di valori assunti da U in ogni punto P di Ω costituisce un campo scalare. Un campo scalare è quindi una funzione scalare del punto, individuato dalle coordinate cartesiane x, y, z ;
- Se A una funzione vettoriale definita in una regione Ω dello spazio; l'insieme di valori (vettori) assunti da A in ogni punto P di Ω costituisce un campo vettoriale
- Se $U = U(P)$ una funzione scalare definita in una regione Ω dello spazio; fissiamo una generica direzione indicata dal vettore \hat{r} ; nel passare dal punto P_0 al punto $P_0 + \Delta P$ la funzione passa dal valore $U(P_0)$ al valore $U(P_0 + \Delta P)$, con $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$:



Si definisce derivata direzionale della funzione U nel punto P lungo la direzione r :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{U(P_0 + \Delta P) - U(P_0)}{\Delta r}$$

La derivata direzionale di una funzione scalare rappresenta quindi la variazione di un campo scalare lungo la direzione fissata da un vettore

- Si definisce gradiente di U in P_0 il vettore diretto lungo una direzione fissata \hat{n} che ha per modulo la derivata direzionale di U lungo \hat{n} :

$$\text{grad}(U) \Big|_{P_0} = \hat{n} \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{P_0}$$

Effettuando il procedimento in tutti i punti di Ω si definisce il campo vettoriale $A = \vec{\nabla}(U)$. [$\vec{\nabla}$ è il simbolo del gradiente]

La direzione del gradiente di un campo scalare è solitamente scelta come quella di massima variazione della funzione U , ovvero la dove è massima la derivata direzionale di U .

- Se $A = \vec{\nabla} U$, allora la funzione scalare U è definita potenziale della funzione vettoriale A .
- Essendo la derivata direzionale di una costante nulla, allora possiamo definire un altro campo scalare V definito come $V = U + U_0$, con U_0 costante, è un potenziale per A : $V = U + U_0$ $\vec{\nabla} V = \vec{\nabla} U = \vec{A}$ (le costanti non alterano il valore del gradiente)
- Il gradiente in coordinate cartesiane vale: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} U \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} U \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} U \hat{k} \right)$

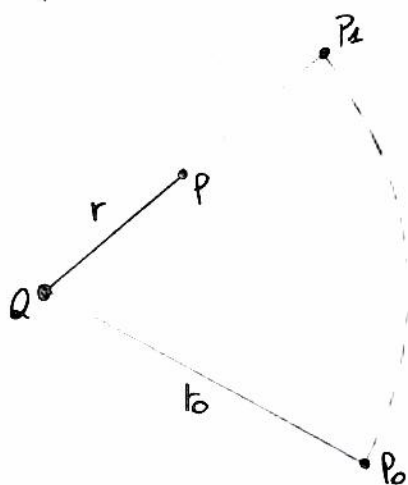
Essendo il potenziale definito e meno di una costante, non interessa calcolare una differenza di potenziali, tra un punto P e un punto P_0 :

$$\Delta V_{PP_0} = V_P - V_{P_0} = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0}$$

Scegliendo P_0 all'infinito, otteniamo $V_{P_0} = 0$, perciò: $V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

1. Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme:

2. > carica puntiforme $Q \rightarrow$ punto esistente reale P $P_0 \rightarrow$ punto fittizio esistente r_0 da Q



La differenza di potenziale $\Delta V_P = V_P - V_{P_0}$ si ottiene integrando il campo elettrostatico lungo un qualsiasi percorso che va da P a P_0 . Grazie, per comodità di calcolo, al percorso costituito dal tratto rettilineo $\overline{PP_1}$ e dall'arco $\overline{P_1P_0}$:

$$\overline{PP_0} = \overline{PP_1} \cup \overline{P_1P_0}$$

$$\int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0}$$

Il secondo integrale è nullo in quanto il campo elettrostatico \vec{E} ha direzione perpendicolare a tutti i tratti della differenza $d\vec{l}$ lungo l'arco $\overline{P_1P_0}$. Lungo il tratto rettilineo $\overline{PP_1}$ vale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \text{ da P a } P_0, \text{ per il principio di sovrapposizione in Q: } V_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \cdot \int_r^{r_0} \frac{1}{r^2} dr + V_{P_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-) \left[\frac{1}{r} \right]_r^{r_0} + V_{P_0} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] + V_{P_0}. \text{ Portando } P_0 \text{ all'infinito, } V_{P_0} = 0, \text{ perciò: } \boxed{V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$$

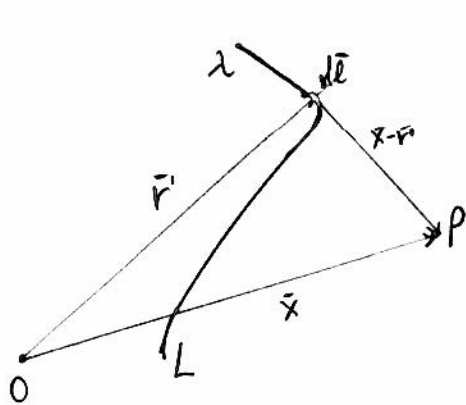
Il risultato può essere esteso, per la validità del principio di sovrapposizione degli effetti, ad una distribuzione di N cariche puntiformi. Date N cariche Q_1, Q_2, \dots, Q_N , il potenziale nel punto P è dato dalla somma dei vettori \vec{r}_i che vanno da ciascuna carica Q_i al punto P, e dalla loro distanza r_i dall'origine:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

• Potenziale elettstatico generato da una distribuzione continua di cariche: 30

Il risultato ottenuto per una distribuzione discreta di cariche puntiformi può essere esteso ad una distribuzione continua di cariche di tipo lineare, superficiale e volumica. Si considera che la sommatoria viene sostituita da un integrale esteso a tutte le distribuzioni continue di cariche:

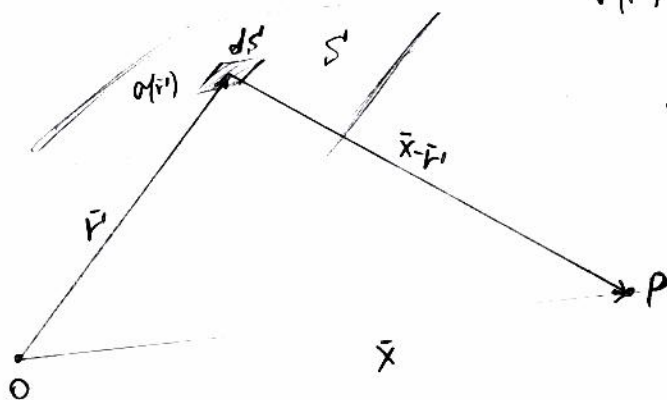
- Distribuzione lineare di cariche:



$$\lambda = \lambda(\vec{r}') : dq = \lambda(\vec{r}') \cdot d\ell$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') \cdot d\ell}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

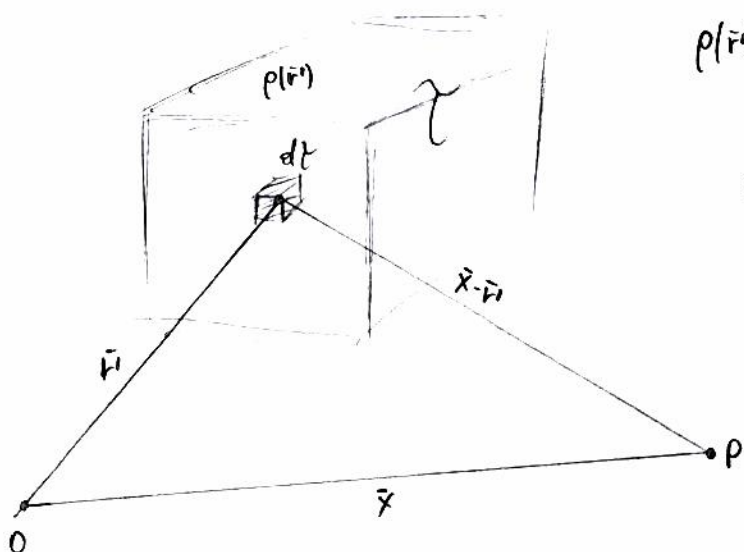
- Distribuzione superficiale di cariche:



$$\sigma(\vec{r}') : dq = \sigma(\vec{r}') \cdot dS$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot dS}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

- Distribuzione volumica di cariche:



$$\rho(\vec{r}') : dq = \rho(\vec{r}') \cdot d\tau$$

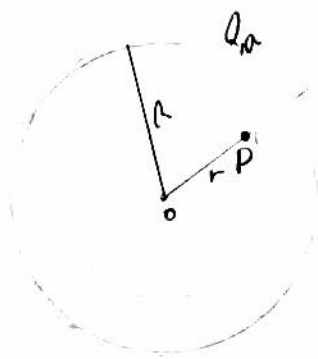
$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot d\tau}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

Di seguito verranno calcolati i potenziali elettrostatici generati da una carica Q uniformemente distribuita, dapprima sulla superficie sferica e poi all'interno della sfera (nel suo volume). Ciò viene fatto partendo dall'espressione del campo elettrostatico generato dalla configurazione di carica ed integrandolo tra due punti P e P_0 scelti opportunamente. È utile ricordare che l'espressione del campo elettrostatico in punti così è diversa se due punti, uno interno alla sfera ed uno esterno ad essa.

Per tale motivazione, anche il potenziale elettrostatico avrà espressioni diverse per punti interni ed esterni della sfera. Come fatto per la determinazione del campo elettrostatico, considereremo una superficie concentrica di raggio r , in modo che, scelto il punto P di interesse, finito ritrovi nella superficie considerata. Per un punto interno alla sfera di raggio R , sceglieremo un $r < R$ ($0 < r < R$), per un punto esterno alla sfera un $r > R$.

• Potenziali elettrostatici generati da una carica Q uniformemente distribuita su una superficie sferica:

- P interno alla sfera ($r < R$):

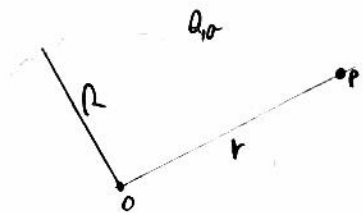


$$\vec{E}_{\text{superficie}} = \begin{cases} 0, & r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} & \text{(ext. sfera)} \end{cases}$$

- scelto P_0 all'infinito, per cui $V_{P_0} = V_{\infty} = \phi$

$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \phi dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \left[\frac{1}{r^2} \right]_R^{+\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\phi - \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$$

- P esterno alla sfera ($r > R$):



$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \int_r^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_r^{+\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

In definitiva:

$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

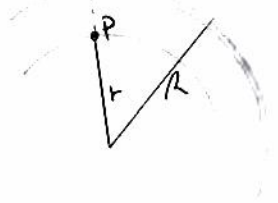
$$\rightarrow V_P = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}, & r > R \end{cases}$$

come ci si poteva aspettare, il potenziale all'interno della sfera è una costante, indipendente dal punto P scelto. Il fatto che la costante è misurabile matematicamente dal fatto che il camp. \vec{E} è il grad(V), ed il gradente di una costante è zero, che è proprio il camp. elettrostatico per punti interni alla sfera.
Inoltre, per $r > R$, il potenziale si comporta come se le cariche fossero concentrate nel centro.

• Potenziale elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita in una sfera.

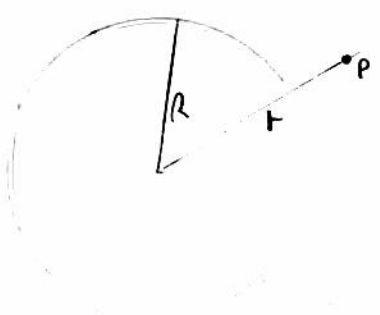
$$E_{sfe} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r, & 0 < r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \text{ (ext. sfera)} \end{cases} \quad \begin{matrix} P_0 \rightarrow +\infty \\ V_{P_0} \rightarrow \phi \end{matrix}$$

- P. interno alla sfera ($r < R$):
 $+\infty \rightarrow P_0$



$$\begin{aligned} V_P &= \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_R^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \cdot \int_r^R r dr + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{R^3} \int_r^R r dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{R^3} \cdot \frac{1}{2} [r^2]_r^R + \right. \\ &+ (-1) \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_R^{+\infty} \Big\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{2R^3} \cdot (R^2 - r^2) - \left[\phi - \frac{1}{R} \right] \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{(R^2 - r^2)}{2R^3} - \right\} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{(R^2 - r^2) + 2R^2}{2R^3} \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^2 - r^2 + 2R^2}{2R^3} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3R^2 - r^2}{R^3} = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \end{aligned}$$

- P. esterno alla sfera ($r > R$):



$$P_0 \rightarrow +\infty \quad +\infty$$

$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad \begin{matrix} \text{(vedi caso superficie sfera)} \\ \text{(carica con } r > R) \end{matrix}$$

Indefinite:

(33)

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r, & \phi < r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \text{ (est. sfera)} \end{cases} \longrightarrow V_p = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right), & \phi < r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, & r > R \end{cases}$$

⚡ notare che, per l'esterno della sfera ($r > R$), il potenziale si comporta come se le cariche fossero concentrate tutte al centro della sfera.

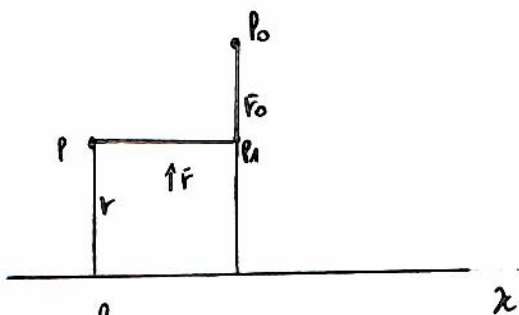
⚡ notare che il potenziale per l'int. della sfera va come r^2 (coerente con la relazione $\vec{E} = -\text{grad} V$), in quanto è l'integrale del campo, che va come r .

• Potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo, indefinito, uniformemente carico:

$\lambda \rightarrow$ densità lineare di cariche $r \rightarrow$ distanza di P dal filo $r_0 \rightarrow$ distanza di P_0 dal filo

- scegliamo il punto P_0 in una posizione finita dello spazio (non all'infinito), in quanto il filo è indefinito

- calcoliamo la differenza di potenziale tra P e P_0 scegliendo il percorso: $\overline{PP_0} = \overline{PP_1} \cup \overline{P_1P_0}$, come da figura:



$$V_p = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}_{\text{filo}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{r} \quad \hat{r} \rightarrow \text{direzione perpendicolare al filo}$$

$$V_p = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{il primo integrale è } \phi \text{ in quanto il campo elettrostatico } \vec{E} \text{ è, in tutti i punti appartenenti al percorso } \overline{PP_1}, \text{ perpendicolare, per cui il prodotto scalare } \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ è nullo lungo tutto il tratto})$$

$$V_p = \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_r^{r_0} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left| \frac{r_0}{r} \right| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left| \frac{r_0}{r} \right|$$

LA SUPERFICIE DI UN CONDOTTORE È EQUIPOTENZIALE:

34

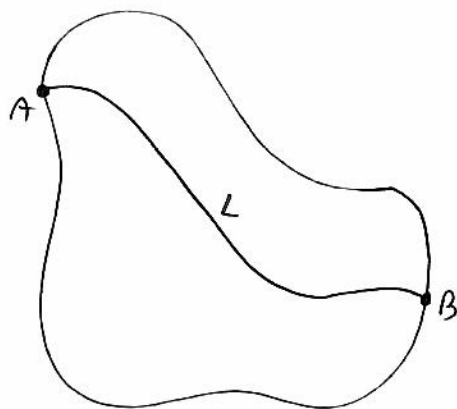
• Consideriamo due punti A e B sulla superficie di un conduttore col nome linea L, interne al conduttore, che li unisce:

$$\Delta V_{AB} = V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{E} = \phi \text{ per tutti i punti interni} \\ \text{al conduttore} \end{array} \right.$$

$$V_A - V_B = \phi \Rightarrow V_A = V_B \quad (\text{il valore di } \phi \text{ è una costante})$$

Quindi:

I punti della superficie di un conduttore sono allo stesso potenziale



EQUAZIONE DI POISSON

Vogliamo trovare una relazione differenziale che colleghi il potenziale elettrostatico in un p.to con la densità di carica volumica esistente in quel punto:

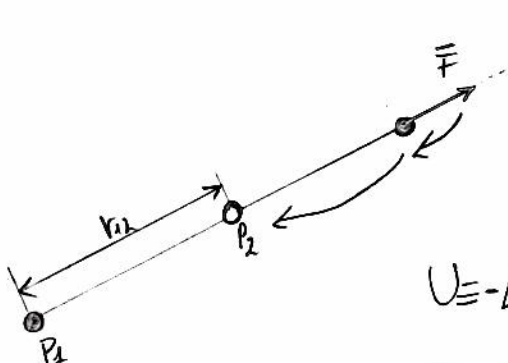
$$\vec{E} = -\text{grad } V \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{div } (-\text{grad } V) = \rho/\epsilon_0 \rightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ che è}$$

detta equazione di Poisson

Tempe delle conservative del camp elettrostatico è possibile definire un'energia potenziale legata ad esso. Per capire meglio il concetto partiamo come esempio il camp gravitazionale: portando una molla ad una certa altezza, essa acquista un'energia potenziale gravitazionale $U = m \cdot g \cdot h$. Tale energia è data dal lavoro svolto per portare la molla dalle posizioni iniziali (corrispondente al caso della molla che genera il camp gravitazionale) all'ultima. Analogamente, una carica q immersa in un camp elettrostatico, se viene portata dalla posizione ∞ a una certa distanza r dalla carica che genera il camp acquista un'energia elettrostatica che è uguale al lavoro compiuto contro le forze elettriche durante il camp per portare la carica in posizione r . Quindi vale: $U = -L_{\infty P}$.

• Energia elettrostatica di due cariche puntiformi:

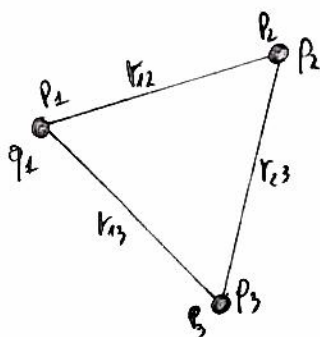
Per definire l'energia elettrostatica di due cariche puntiformi q_1 e q_2 , parte e distanza r_{12} , il lavoro che bisogna compiere contro le forze del camp elettrostatico per portare una carica dall'infinito alla distanza r_{12} dall'altra:



$q_1 \rightarrow$ posizione di q_2
 $L \rightarrow$ lavoro contro le forze repulsive \vec{F} per portare q_2 dall' ∞ alla posizione q_2 , distante r_{12} da q_1

$$U \equiv -L_{\infty P_2} = - \int_{\infty}^{r_{12}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 \cdot q_2 \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r_{12}} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}}$$

• Energia elettrostatica di un sistema di N cariche puntiformi:



Consideriamo un sistema di 3 cariche puntiformi. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto contro le forze del camp per portare q_2 dall'infinito alla posizione q_2 , successivamente, per portare q_3 dall'infinito nella posizione q_3 . Nel I° caso otteniamo:

$$-L_{\infty, P_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}$$

Nel II° caso bisogna tener conto del lavoro compiuto contro le forze del camp generato sia da q_1 che da q_2 :

$$-L_{\infty, P_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}} \Rightarrow$$

Pertanto, per un sistema di cariche puntiformi l'energia elettrostatica è: 36

$$U \equiv -L_{\infty, p1} - L_{\infty, p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_1 p_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_1 p_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_2 p_3}{r_{23}}$$

Questo risultato può essere generalizzato ad N cariche puntiformi:

$$U = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_i \cdot p_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_i \cdot p_j}{r_{ij}}$$

• Esprimere dell'energia elettrostatica in funzione del potenziale elettrostatico:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_i \cdot p_j}{r_{ij}} \longrightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i \cdot \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_j}{r_{ij}} \right) \xrightarrow{V_i}$$

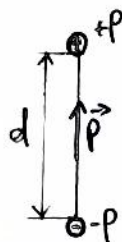
$V_i \rightarrow$ potenziale elettrostatico generato da tutte le cariche puntiformi, eccetto le i -esime, nel punto dove è presente la carica i -esima. Per cui:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i \cdot V_i$$

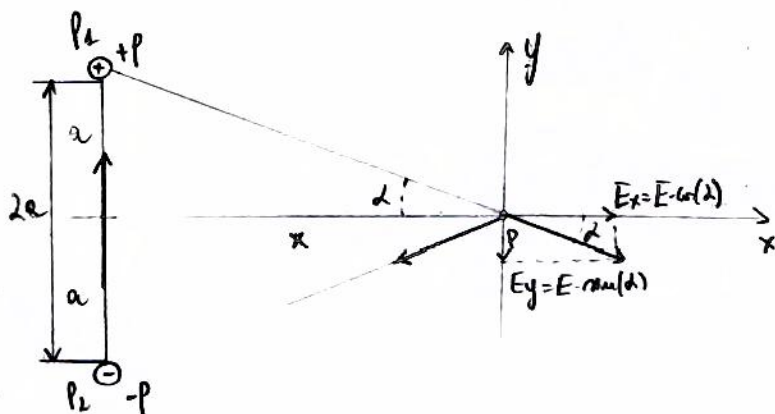
- Si definisce dipolo elettrico un sistema di due cariche puntiformi, aventi lo stesso valore, ma di segno contrario, poste rispettivamente a distanza d .

- Su un dipolo elettrico è possibile definire un momento di dipolo come il vettore \vec{p} avente:

- modulo pari a $q \cdot d \Rightarrow |\vec{p}| = q \cdot d$ (C.m)
- direzione delle congiungenti tra le due cariche
- verso dalle cariche negative e quelle positive



- Calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti del suo asse:



- Per la sovrapposizione degli effetti, il campo elettrostatico nel p.to P è la somma dei campi elettrostatici dovuti alle cariche positive ($\vec{E}^{(+)}$) e alle cariche negative ($\vec{E}^{(-)}$):

$$\vec{E}_P = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} \quad \text{L'operazione vettoriale si realizza nelle sue componenti cartesiane:}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{Px} = \vec{E}_x^{(+)} + \vec{E}_x^{(-)} = 0 \text{ (per simmetria)} \\ \vec{E}_{Py} = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} \end{cases}$$

Perché il campo elettrostatico generato dal dipolo elettrico nel p.to P è tutto diretto lungo l'asse delle y:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} = \vec{E}_y \cdot \hat{y}$$

$$|\vec{E}_{Py}| = |\vec{E}_y^{(+)}| + |\vec{E}_y^{(-)}|, |\vec{E}_y^{(+)}| = |\vec{E}_y^{(-)}| = |\vec{E}^{(+)}| \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow p_1 P = p_2 P = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\vec{E}_y^{(+)} = \vec{E}_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{x^2 + a^2} \cdot \sin(\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{array} \right. \Rightarrow E_y^{(+)} = E_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{x^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{y}$$

$$|\vec{E}_{Py}| = 2 \cdot |\vec{E}^{(+)}| \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot p \cdot a}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

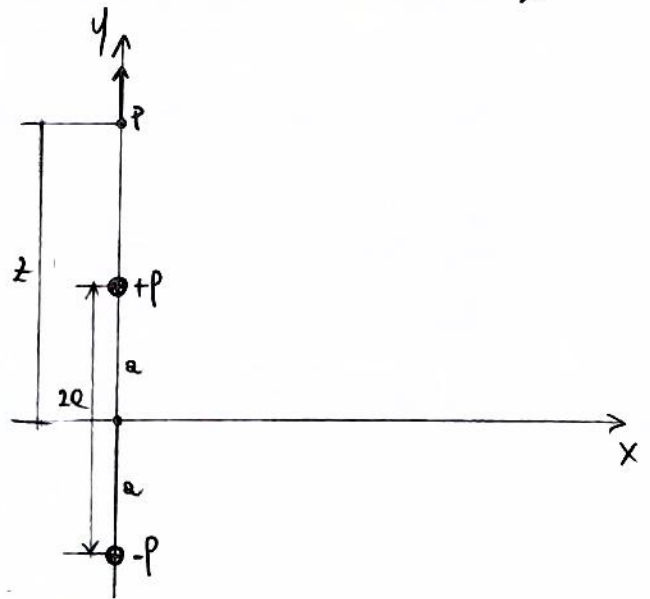
questo risultato può essere espresso in termini del momento di dipolo \vec{p} :

$$|\vec{E}_{Py}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \vec{p} = 2 \cdot p \cdot \hat{y} \quad \left| \begin{array}{l} \text{per } x \gg 2a \text{ (e grande distanza dal dipolo elettrico):} \\ \vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{x^3} \end{array} \right.$$

- Calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti della retta delle due cariche, esternamente ad esse:

38

$$\vec{E} = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} \quad \begin{cases} \vec{E}_x = \vec{E}_x^{(+)} + \vec{E}_x^{(-)} = 0 \\ \vec{E}_y = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} \end{cases}$$



$$\vec{E}_y^{(+)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{(z-a)^2} \hat{y} \quad \vec{E}_y^{(-)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{(z+a)^2} \hat{y}$$

$$\vec{E}_y = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{|q|}{(z-a)^2} - \frac{|q|}{(z+a)^2} \right] \hat{y}$$

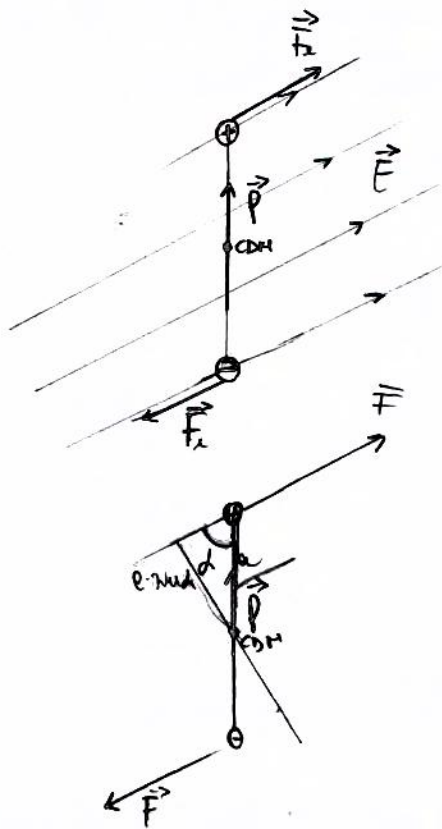
$$\Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(z+a)^2 - (z-a)^2}{(z-a)^2(z+a)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(z^2+2az+a^2 - z^2+2az-a^2)}{(z-a)^2(z+a)^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4az}{(z^2-a^2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{(z^2-a^2)^2}$$

per $z \gg a$:

$$\vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{z^3}$$

- Comportamento di un dipolo elettrico quando questo è immerso in un campo elettrico: momento delle forze relativo ad un dipolo:

Immerso in un campo elettrico uniforme:



Sulle cariche del dipolo agisce una forza elettrica \vec{F} (dovuta alla presenza del campo elettrico). \vec{F} che, in modulo, $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Tali forze hanno lo stesso modulo, ma direzione opposta. Due forze centrali con punti caratteristici non definiti come coppia di forze. Possiamo calcolare su una coppia di forze il momento meccanico τ , rispetto a qualsiasi punto. Calcolo τ rispetto al COM.

$d \rightarrow$ coppia che \vec{p} forma con la direzione del campo elettrico
e $\sin d \rightarrow$ braccio delle forze (misurato a un polo del dipolo o al centro del dipolo)

$$\tau = \vec{F} \cdot a \cdot \sin(d)$$

Applicando la regola delle manovole dx, entrambi i momenti sono entrambi al polo del dipolo, e quindi vanno sommati:

$$\tau = 2 \cdot q \cdot \sin(d) \cdot \vec{F} = 2 \cdot q \cdot \sin(d) \cdot p \cdot \vec{E} = [2 \cdot q \cdot p] \vec{E} \cdot \sin(d)$$

$\gamma = \vec{p} \cdot \vec{E} \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \boxed{\gamma = p \wedge E}$ tale relazione vale anche se il campo non è uniforme. 39

Il doppio moltiplicando \vec{p} non è parallelo alla direzione del campo elettrico, dopo averlo traslato.

- Un condensatore è un sistema di due conduttori tra i quali esiste un'induzione elettrostatica completa. Per tali sistemi, il valore assunto dalla carica Q dell'uno o dell'altra armatura è proporzionale alla differenza di potenziale ΔV tra le armature stesse: il rapporto tra Q e ΔV è costante.
- La costante di proporzionalità del condensatore proprio il rapporto tra Q e $|\Delta V|$:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} \Rightarrow Q = C \cdot |\Delta V| \quad C = \frac{\text{Coulomb}}{\text{volt}} = F (\text{Farad}) \quad 1F = \frac{1C}{1V}$$

- La costante dipende dalle geometrie del condensatore e dall'eventuale dielettrico presente tra le armature.
- Energia elettrostatica di un condensatore
- $U = -L$ (energia potenziale = - lavoro per spostare la carica contro le forze del campo) per campi conservativi
- Calcoliamo il lavoro necessario per trasferire una carica $+Q$ da un'armatura all'altra, partendo dalla situazione in cui il condensatore è scarico.

- $V = V(t) \rightarrow$ diff. di potenziale tra le armature $Q = Q(t) \rightarrow$ carica sulle armature per un dato $t \rightarrow V = V \quad Q = +P/-P$

- $dL = dP \cdot V \Big|_{C = \frac{Q}{V}} \Rightarrow \Rightarrow dL = dP \cdot \frac{Q}{C} \quad \left(\text{lavoro per spostare una carica elementare } dq \text{ da un'armatura all'altra} \right)$

- $L = \int_0^Q dL = \frac{1}{C} \cdot \int_0^Q q \cdot dP = \frac{1}{C} \cdot \left[\frac{P^2}{2} \right]_0^Q = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 \quad \left(\text{lavoro per spostare l'intera carica } Q \right)$

- $|U| = |L| \Rightarrow U = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 \Big|_{C = \frac{Q}{\Delta V}} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\frac{Q}{\Delta V}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta V \cdot Q = \boxed{\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \Delta V}$

- $U = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 \Big|_{C = \frac{Q}{\Delta V}} \Rightarrow U = \frac{(C \cdot \Delta V)^2}{2C} = \frac{C \cdot \Delta V^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot C \cdot \Delta V^2}$

- ANALISI DI ALCUNE TIPOLOGIE DI CONDENSATORI COMUNEMENTE DIFFUSE

- Veniamo di seguito a ripartire le analisi di alcune particolari tipologie di condensatori comuni. Per ora ci limiteremo al calcolo di alcune grandezze fondamentali:

- Differenza di potenziale tra le armature: ΔV verrà calcolata come: $\Delta V = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, L qualsiasi percorso chiuso che unisce le armature

- Costante: $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$

- Energia elettrostatica: questa verrà calcolata come l'intero lavoro delle densità di carica per $U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_V E^2 dV$

① Condensatore piano:

Un condensatore piano è costituito da due armature piane parallele di area A , porte e distanze d . Piano $+Q$ e $-Q$ le cariche sulle armature:

• calcolo delle differenze di potenziale:

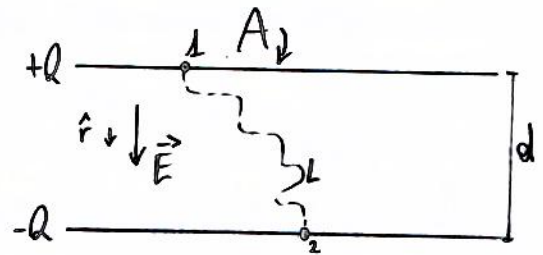
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{r} = \frac{Q}{A} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot \hat{r}$$

$$|\Delta V| = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d$$

• calcolo della capacità:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$$

da notare che questo è un caso ideale, nel quale non sono assolutamente trascurati gli effetti di bordo. Lo può essere esatto anche in casi reali se si considerano armature piane ideali: $\sqrt{A} \gg d$



• calcolo dell'energia elettrostatica:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} E^2 d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} \frac{Q^2}{\epsilon_0^2} d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 L^2} \cdot \int_{\text{spazio}} d\tau \quad \left| \int_{\text{spazio}} d\tau \text{ è il volume tra le 2 armature, per } A \cdot d \right.$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 L^2} \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 A^2} \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \cdot d \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \left(\frac{Q^2}{2C} \right)$$

② Condensatore sferico:

Le armature sono costituite da due superfici sferiche concentriche di raggi R_1 ed R_2 . Piano $+Q$ e $-Q$ le cariche.

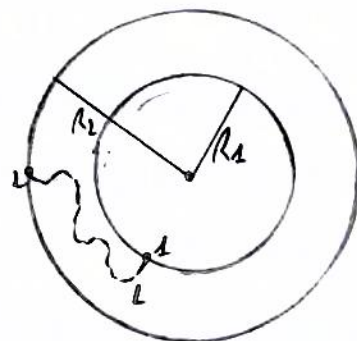
Il campo elettrico è radiale e vale:

$$E = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases}$$

(per ottenere il valore del campo basta applicare il th. di Gauss e) superfici sferiche concentriche di raggio r , per qualsiasi

• calcolo delle differenze di potenziale:

$$|\Delta V| = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$



• Calcolo delle capacità:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

NOTA: se $R_2 = R_1 + d$, con $d \ll R_1$ (armature molto vicine tra di loro) la capacità sarà:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1(R_1 + d)}{d} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot R_1^2}{d} \approx \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (\text{capacità del condensatore piano})$$

• Calcolo dell'energia elettrostatica:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} E^2 d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \right)^2 d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right] =$$

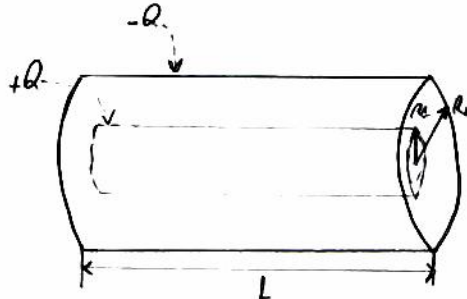
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right), \text{ che può essere riscritta in funzione delle capacità: } U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} = \frac{Q^2}{2 \left(4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)} =$$

$$= \frac{Q^2}{2C}$$

• Condensatore cilindrico:

Le armature sono due infusori cilindrici concentrici coassiali di lunghezza L , aventi raggi R_1 ed R_2 . Sono +Q e -Q le cariche sulle armature e $\lambda = Q/L$ le densità lineari di carica. Nell'ipotesi di trascurare gli effetti di bordo, nelle zone comprese tra i due conduttori cilindrici il campo elettrico (radiale) si comporta come se la carica Q fosse distribuita uniformemente conduttore lineare a lungo l'asse del sistema:

$$E = \begin{cases} \phi, & \phi \leq r < R_1 \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r}, & R_1 < r < R_2 \\ \phi, & r > R_2 \end{cases}$$



• Calcolo della differenza di potenziale:

$$|\Delta V| = \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \ln \left| \frac{R_1}{R_2} \right|$$

• Calcolo delle capacità: $C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \left| \frac{R_1}{R_2} \right|}$

• Calcolo dell'energia elettrostatica:

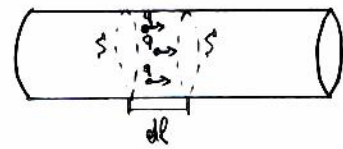
43

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{spazio}} E^2 d\tau \rightarrow \text{funzione cilindrica} \rightarrow d\tau = 2\pi r L dr \rightarrow E^2 d\tau = \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r} \right)^2 2\pi r L dr = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r L dr$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0^2 L} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} \ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right|$$

Consideriamo un filo conduttore, di sezione S , attraversato da cariche in moto. Si definisce intensità di corrente (I) la carica Q che attraversa la sezione S del conduttore in un tempo dt : $I = \frac{dQ}{dt}$.

$I [A]$ (ampere): Un Coulomb è la carica che, attraversando la sezione di un conduttore in un secondo, genera la corrente di 1 Ampere (1A)



• Definisce la velocità delle cariche in una corrente I :

— $q \rightarrow$ valore di ogni carica $v \rightarrow$ velocità (in modulo) delle cariche $dl \rightarrow$ carica che attraversa la sezione S nel tempo dt
 $m \rightarrow$ numero di cariche nel conduttore per unità di volume $n = \frac{m \rho}{S dl}$

$$dQ = \underbrace{m}_{\substack{\uparrow \\ \text{mp}}} \cdot \underbrace{S \cdot dl}_{\substack{\downarrow \\ \text{v} dt}} \cdot |q| = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \cdot dt \Rightarrow dQ = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \cdot dt \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \Rightarrow I = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \Rightarrow v = \frac{I}{m \cdot S \cdot |q|}$$

— i.e.: il verso positivo delle correnti è quello delle velocità delle cariche positive. In un conduttore sono le cariche negative a muoversi, quindi il verso delle correnti è contrario al moto delle cariche.

• Intensità di corrente:

L'intensità di corrente I è uno scalare, ma può essere descritta da un campo vettoriale $\vec{J}(r, t)$, detto densità di corrente tale che il flusso del campo \vec{J} attraverso una superficie S fornisce proprio la corrente I : $I(t) = \int_S \vec{J}(r, t) \cdot d\vec{S}$ $\vec{J} \equiv A/m^2$

• Equazione di continuità:

Consideriamo una carica Q distribuita con densità volumica ρ in un volume τ , delimitato da una superficie chiusa S :

$$Q = \int_{\tau} \rho d\tau$$

— in un insieme di cariche racchiuso in questo volume, vogliamo dimostrare il principio di conservazione delle cariche: se una parte delle cariche attraversa la superficie S (uscendo dal volume), c'è una variazione di cariche all'interno del volume τ che è proprio uguale alle cariche uscite da S . Supponiamo che nel tempo dt le cariche Q subiscano, all'interno di S , una variazione $dQ = -d \left(\int_{\tau} \rho d\tau \right)$, le cariche uscite (la variazione è negativa) dalla superficie S vale:

$$dQ_{\text{usc}} = I \cdot dt = dt \cdot \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{applicando il t.h. delle divergenze vale: } \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{facendo: } -d \left(\int_{\tau} \rho d\tau \right) = dt \cdot \int_{\tau} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow -\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho d\tau \right) = \int_{\tau} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow$$

\Rightarrow è possibile portare la derivata sotto il segno di integrale dato che la superficie è costante e quindi la sua misura non dipende dal tempo:

$$\int_{\tau} -\frac{d}{dt} \rho d\tau = \int_{\tau} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow \text{div} \vec{J} \cdot d\tau + \frac{d}{dt} \rho d\tau = 0, \text{ detta equazione di continuità}$$

• Leggi di Ohm:

$$\Delta V = R \cdot I$$



45

$\Delta V = V_2 - V_1$ $R \rightarrow$ resistenza del tratto di filo conduttore, espressa in Ω (Ohm)

II^e: La resistenza di un conduttore filiforme di lunghezza L e sezione S vale:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} \quad \left| \begin{array}{l} \rho \rightarrow \text{resistenza specifica o resistività del materiale conduttore} \left(\frac{\Omega \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = \Omega \cdot \text{m} \right) \\ S \rightarrow \text{sezione del conduttore} \quad L \rightarrow \text{lunghezza del conduttore} \end{array} \right.$$

• Effetto Joule:

Il passaggio di corrente attraverso una resistenza R provoca una dissipazione d'energia. La potenza dissipata vale:

$$P = \Delta V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Introduzione al campo magnetico

- In un punto P dello spazio è presente un campo di induzione magnetica \vec{B} se, in una carica puntiforme P, che tramite in P con velocità \vec{v} , agisce una forza \vec{F} del tipo: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$, chiamata forza di Lorentz. Tale forza è perpendicolare alla velocità \vec{v} , per cui non ne altera il modulo, ma solo la direzione: per tale motivo la forza di Lorentz è detta di tipo deflettente. Le dimensioni fisiche di \vec{B} sono:

$$[B] = \frac{[F]}{[q] \cdot [v]} = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \text{ (tesla)}, \text{ oppure } W/m^2 \text{ (wheat/m}^2\text{)} \quad 1T = 1 \frac{N}{A \cdot m} \quad 1G(\text{gauss}) = 10^{-4}T$$

- Essendo la forza di Lorentz perpendicolare alla velocità, essa non compie lavoro sulla carica:

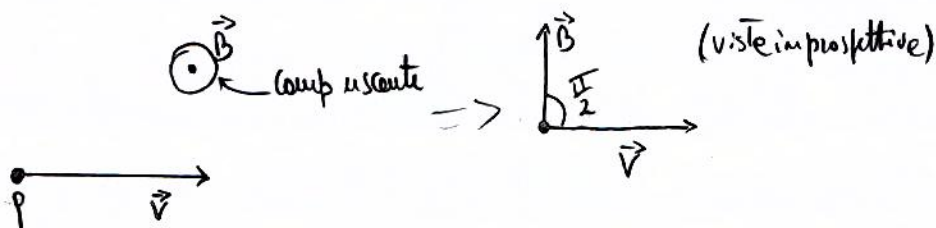
$$L = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}, \text{ per le espressioni del prodotto misto tra tre vettori: } (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1)$$

$$\text{vale: } q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = d\vec{l} \wedge q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{B} \text{ (dato fuori le parentesi scalare P)} = q \cdot d\vec{l} \wedge \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{B}, \text{ ma } d\vec{l} \wedge d\vec{l} = 0 \text{ (non paralleli)}$$

$$\text{per cui: } L = 0 \text{ c.v.d.}$$

Azione del campo magnetico su una carica q in moto rettilineo:

- Supponiamo di avere una carica q in moto in un campo magnetico \vec{B} uniforme, uscente dal piano del foglio. La velocità di P è \vec{v} , tale che essa fornisca la direzione del campo un campo di Po (\vec{B} e \vec{v} sono perpendicolari):



- Le forze di Lorentz che agisce sulle cariche q è diretta perpendicolarmente al piano individuato da \vec{B} e \vec{v} (con direzione definita dalle regole della mano destra). Essendo l'angolo tra \vec{B} e \vec{v} di 90° :

$$|\vec{F}| = q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(90^\circ) = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(90^\circ) = q \cdot v \cdot B, \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow m \cdot \vec{a} = q \cdot v \cdot B \Rightarrow a = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} \text{ (costante rispetto al tempo)}$$

- vedendo l'espressione delle cariche centripete, vedremo che le cariche immerse nel campo si muovono di moto circolare uniforme con:

$$\bullet \text{ accelerazione centripeta } a_c = \frac{q \cdot v \cdot B}{m}$$

$$\bullet \text{ velocità angolare: } \omega = \frac{v}{R}, \quad v = \omega \cdot R$$

- l'accelerazione centripeta può anche essere espressa come $a_c = \frac{v^2}{R}$, ed equando:

$$a = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \frac{q \cdot B}{m} = \frac{v}{R} \Rightarrow \left[R = \frac{v \cdot m}{q \cdot B} \right], \text{ per cui: } v = \omega \cdot R \Rightarrow v = \omega \cdot \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \Rightarrow \omega = \frac{q \cdot B}{m}$$

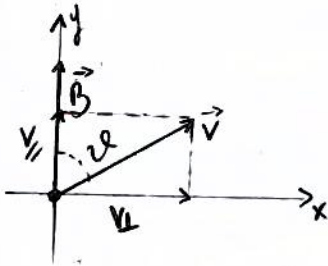
$$\cdot T(\text{periodo}) = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

47

- In definitiva possiamo dire che una carica q si muove in un campo magnetico \vec{B} con velocità perpendicolare a \vec{B} si muove con una Traiettoria circolare lungo il verso perpendicolare a quello individuato da \vec{v} e \vec{B} , più precisamente di moto circolare uniforme, con:

$$r_c = \frac{p \cdot v \cdot B}{m} (\text{circonferenza centrifuga}) \quad R = \frac{V \cdot m}{q \cdot B} (\text{raggio}) \quad \omega = \frac{q \cdot B}{m} (\text{velocità angolare}) \quad T = \frac{2\pi m}{q \cdot B} (\text{periodo})$$

- Supponiamo ora che la carica q si muove in un campo magnetico con una velocità \vec{v} che forma l'angolo α con la direzione del campo magnetico \vec{B} :



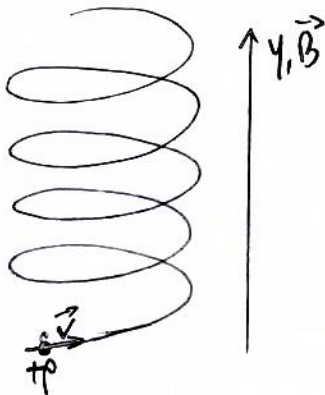
nella carica q agisce la forza di Lorentz $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

però scomponiamo \vec{v} nelle sue componenti: interviene:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad \left| \begin{array}{l} v_{\parallel} \rightarrow \text{componente parallela al campo magnetico } \vec{B} \\ v_{\perp} \rightarrow \text{componente perpendicolare al campo magnetico } \vec{B} \end{array} \right.$$

Il problema può quindi essere risolto in due parti:

- ① Contributo dovuto alla componente v_{\perp} , $v_{\perp} = |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) = v_x$. La particella ruota nel piano ortogonale a \vec{B} e \vec{v}_{\perp} .
- $$R = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B} = \frac{m \cdot v \cdot \sin \alpha}{q \cdot B} \quad (\text{fr. punto detto in precedenza})$$
- ② Contributo dovuto alla componente v_{\parallel} , $v_{\parallel} = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) = v_y$. Essendo v_{\parallel} in direzione parallela al campo, la \vec{F} di Lorentz è nulla lungo la direzione di \vec{B} (in modulo). In conseguenza, una particella muoversi con velocità v parallela al campo magnetico \vec{B} , parte in moto rettilineo uniforme, con velocità \vec{v} , costante.
- Le combinazioni dei moti lungo le due direzioni (contributo di v_{\perp} che fa ruotare e di v_{\parallel} che la fa traslare) formano le curve con una Traiettoria elicoidale:



$$P = v_{\parallel} \cdot T, T = \frac{2\pi m}{q \cdot B} \quad (\text{però dell'elica})$$

N.B.: Come già detto, il lavoro compiuto dalla forza di Lorentz per spostare una carica per una posizione P ed una posizione Q è sempre nullo: $L_{LQ} = 0$. Per il th. dell'energia cinetica si ha: $L_{LQ} = E_Q - E_P$, dunque che l'energia cinetica della massa puntiforme m che trasporta la carica q rimane costante. Pertanto, il campo di ind. magnetico \vec{B} non modifica il modulo della velocità della carica, ma ne varia la direzione. Salvo che il campo \vec{B} non agisca la carica q, che non ha massa, soltanto.

1^ª FORMULA DI LAPLACE

Consideriamo una corrente stazionaria I che fluisce in un filo conduttore di lunghezza L . Se $d\vec{\ell}$ un elemento di filo orientato come la corrente. Un elemento di corrente $I d\vec{\ell}$ produce nel punto P un campo magnetico elementare $d\vec{B}$ dato dalla relazione:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

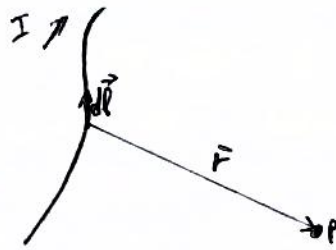
$\mu_0 \rightarrow$ permeabilità magnetica del vuoto,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

la relazione è detta 1^ª formula di Laplace.

Integrando $d\vec{B}$ su tutto il filo si ottiene l'espressione del campo magnetico \vec{B} in P dovuto alla corrente che circola in tutto il filo.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}, \text{ dove sotto il segno di } \int \text{ formula di Laplace in forma integrale}$$



APPLICAZIONI DELLA 1^ª FORMULA DI LAPLACE:

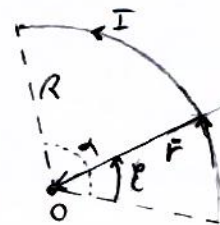
Campo di induzione magnetica prodotto da un filo e forme di arco di circonferenza, percorsi da corrente, nel suo centro.

Consideriamo un tratto di filo e forme di arco di circonferenza di raggio R , con centro O , percorsi da una corrente I . Calcoliamo il campo di induzione magnetica \vec{B} nel centro O .

$$d\vec{\ell} = \vec{r} d\ell \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \left| \begin{array}{l} d\vec{\ell} \perp \vec{r} \\ |\vec{r}| = R \\ d\vec{\ell} = \vec{r} d\ell \end{array} \right. \Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R d\ell \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R} \quad (\text{camp. elementare in } O)$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int d\ell \Rightarrow |\vec{B}| = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \alpha} \quad (\text{camp. totale in } O)$$

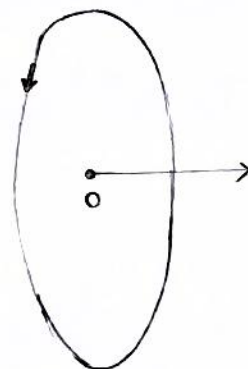


Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsi da corrente, nel suo centro.

Possiamo calcolare il campo elementare $d\vec{B}$ calcolato in precedenza:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R}, \text{ questa volta integriamo su tutte le circonferenze, arco di } \phi \text{ e } 2\pi:$$

$$|\vec{B}| = \int d\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \frac{1}{R} \cdot 2\pi R \Rightarrow \boxed{\frac{\mu_0 I}{2R}}$$



- Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo finito, pieno di corrente: 4P

$d \rightarrow$ elemento \vec{r} ed \vec{x}

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{x} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cdot r \cdot \sin(\alpha)}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin(\alpha)}{r^2}$$

con direzione \perp al piano individuato da $d\vec{x}$ ed \vec{r} verso entente nel senso del filo. Per ottenere il campo magnetico \vec{B} totale in P devo integrare $d\vec{B}$ su tutto il filo.

$\vec{B} = \int_{\text{filo}} d\vec{B} \rightarrow$ effettuo un cambio di variabile, restando come variabile d'integrazione l'angolo β scelto come complementare di α ed esprimo tutte le variabili in funzione di β :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin(\alpha)}{r^2} \quad \begin{cases} \alpha = \pi - \beta \\ R = r \sin \beta \Rightarrow r = \frac{R}{\sin \beta} \\ x = R \cot \beta \\ dx = R \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \beta}\right) d\beta = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \end{cases} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-\frac{R}{\sin^2 \beta} \cdot d\beta \cdot \sin(\pi - \beta)}{\left(\frac{R}{\sin \beta}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \sin(\pi - \beta)}{\frac{R^2}{\sin^2 \beta}} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\pi - \beta)}{R} d\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\beta)}{R} d\beta$$

$$|\vec{B}_{\text{tot}}| = \int_{\pi - \theta_2}^{\theta_1} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\beta)}{R} d\beta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\cos(\beta)]_{\pi - \theta_2}^{\theta_1} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\theta_1) - \cos(\pi - \theta_2)) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2))$$

Se il pto P è nel tratto del filo \rightarrow $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \infty$. Il campo diverge in P.

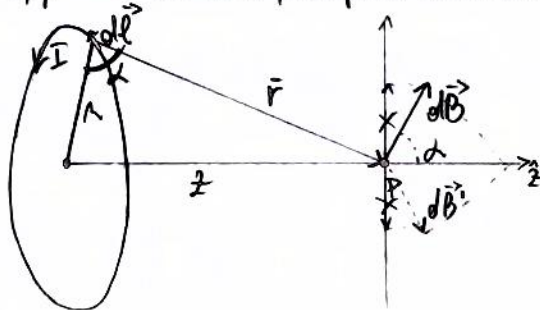
Se il pto P è sulle rette del tratto di filo, i vettori $d\vec{B}$ ed \vec{r} sono antiparalleli, quindi $d\vec{B} \wedge \vec{r} = 0$ e vale su ogni $d\vec{B}$ nel tratto di filo, per cui: $d\vec{B} = 0, \forall d\vec{B} \in L$

Il campo è nullo in P.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \quad \begin{matrix} \theta_1 = \pi \\ \theta_2 = 0 \end{matrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\pi) + \cos(0)) = 0$$

- Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, piena di corrente, nei punti del suo asse:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad |\vec{r}| \perp d\vec{l} \Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$



Le componenti lungo le verticali si elidono fra le simmetrie

del problema. Resta solo la componente lungo z. $dB_z = |dB| \cdot \cos(\alpha) \quad R = r \sin(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{R}{r} \Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cdot \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} dl$

$$B_z = \int_{\text{spira}} dB_z = \int_{\text{spira}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \int_{\text{spira}} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3} \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |\vec{B}_z| = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

50

- Camp di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo indefinito, preso da cune: legge di Biot-Savart.
- Possiamo considerare il filo indefinito come un caso particolare di un filo di lunghezza L , con $L \rightarrow +\infty$. Partiti con la finezione, il camp B in un punto P vale: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(0) + \cos(\pi)) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, con direzione \perp e quella del piano formato dal filo e dal \vec{r} (verso definito dalle regole della mano destra). Tale relazione prende il nome di legge di Biot-Savart.

• NOTAZIONI SU CAMPI CENTRALI ED AMMAGLIATI:

- Ogni camp centrale è conservativo, quindi è irrotazionale. Esempio: camp elettrostatico.

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{e} = \phi \quad \text{rot}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

- Ogni camp elicoidale è solenoidale. Esempio: camp magnetico

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

• II^a FORMULA DI LAPLACE

- Per le linee di forza vale: $d\vec{F} = d\rho \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \mid \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \mid \vec{I} = \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow d\rho = I \cdot dt \Rightarrow d\vec{F} = I \cdot d\vec{p} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I \cdot d\vec{p} \wedge \vec{B}$
- $d\vec{F} = I \cdot d\vec{p} \wedge \vec{B}$ è definita II^a formula di Laplace in forma differenziale
- $\vec{F} = I \int_L d\vec{p} \wedge \vec{B}$ è definita II^a formula di Laplace in forma integrale
- \vec{F} è la forza che agisce su un elemento di filo $d\vec{p}$ orientato come la corrente che lo attraversa

NOTA BENE:

- La I^a F.D.L. permette di calcolare il camp magnetico \vec{B} (in forma differenziale) o il camp B (in forma integrale) esplicito in un f.to. l'esterno ed un conduttore filiforme attraversato da corrente. Il camp B è dato dall'insieme di correnti nel conduttore
- La II^a F.D.L. permette di calcolare la forza che agisce su un elemento di filo (in forma differenziale) o sul filo (in forma integrale) attraversato da corrente ed immerso in un camp magnetico

• Momento di dipolo esercito da una spira piana di corrente

Si definisce momento di dipolo di una spira piana attraversata da una corrente I il vettore: $\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}$, dove \vec{S} è il vettore esercito alla superficie S della spira, diretto perpendicolarmente alla spira, con verso dato dal pgl delle man. destre facendo ruotare richiudendo il verso delle correnti.

• Momento meccanico agente su una spira rettangolare piana di corrente ed immersa in un camp. mag. \vec{B} uniforme:

Per le II^e formule di Laplace:

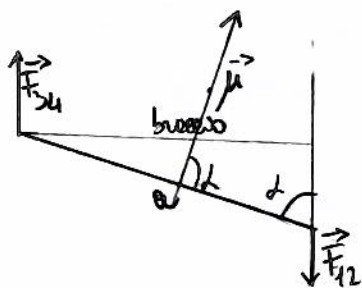
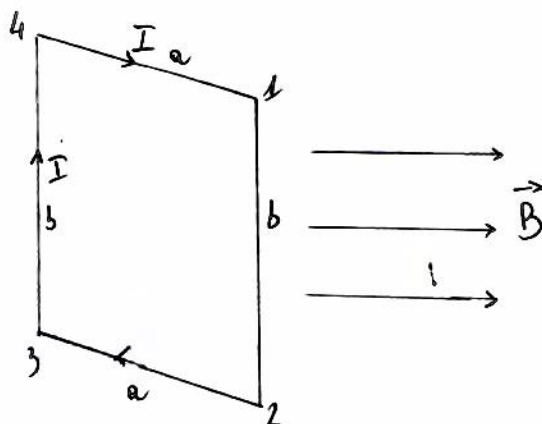
$$\vec{F}_{23} = I (\vec{z3}) \wedge \vec{B}; \quad \vec{F}_{41} = I (\vec{14}) \wedge \vec{B}$$

• Ne hanno la direzione dell'asse di rotazione, lo stesso modulo e versi contrari: costituiscono una coppia di forze e braccio nullo, quindi non sviluppano alcuna rotazione della spira

Sui lati 12 e 34 (di lunghezza b) agiscono le forze:

$$\vec{F}_{12} = I (\vec{12}) \wedge \vec{B}; \quad \vec{F}_{34} = I (\vec{34}) \wedge \vec{B}$$

• Ne hanno lo stesso modulo $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{34}| = I \cdot b \cdot B$ (il camp. \vec{B} è \perp al lato b , per cui il $\sin(\alpha) = \sin(90^\circ) = 1$), verso opposti e un braccio (non nullo strettamente). Costituiscono una coppia di forze di braccio $e \cdot \sin(\alpha)$.



$$\text{braccio} = a \cdot \sin(\alpha)$$

$$\gamma = F_{12} \cdot \text{braccio} = I \cdot e \cdot b \cdot B \cdot \sin(\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} F_{12} = I \cdot b \cdot B \\ \text{braccio} = e \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right.$$

γ può essere espresso come:

$$\gamma = \vec{\mu} \wedge \vec{B}, \text{ in modulo: } |\gamma| = I \cdot e \cdot b \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\gamma| = |\vec{\mu} \wedge \vec{B}| = \boxed{I \cdot e \cdot b} \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

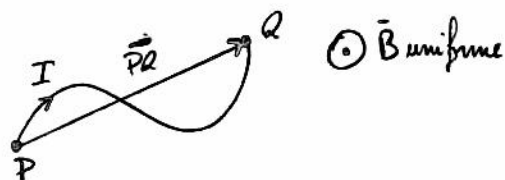
$\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}$ \downarrow \vec{S} è anche l'angolo compreso tra $\vec{\mu}$ e \vec{B}

La direzione di $\vec{\mu}$ è perpendicolare alla superficie, proprio come in fig., per cui le 2 espressioni sono equivalenti.

Forze agenti su un tratto di filo, percorso da corrente, ed immerso in un campo magnetico uniforme:

Consideriamo un tratto di conduttore rigido, di estremi P e Q, attraversato da corrente I, nel verso che va da P a Q. Il campo \vec{B} in cui è immerso è uniforme. Per la II^a formula di Laplace la forza agente sul filo è:

$$\vec{F} = I \int_{\text{filo}} d\vec{l} \wedge \vec{B} \rightarrow \vec{F} = I \cdot \left(\int_{\text{filo}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}$$



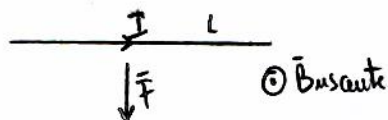
dove si è fatto mettere in evidenza estrarre il campo \vec{B} , essendo uniforme. L'integrale non è nient'altro che il vettore orientato da P a Q, perciò:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{PQ} \wedge \vec{B}$$

Quindi, la forza che agisce su un conduttore rigido non dipende né dalla forma, né dalle sue dimensioni, né dal vettore che unisce i suoi estremi, orientato come il verso delle correnti. In particolare se il filo è rettilineo, vale:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$$

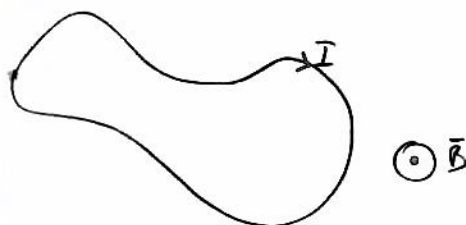
Consideriamo il particolare caso in cui il tratto di filo rettilineo è ortogonale al campo \vec{B} uniforme:



Forze agenti su un filo chiuso, percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico uniforme.

Supponiamo di avere un filo conduttore chiuso, e forme di spina, attraversato da una corrente stazionaria I. Per quanto detto prima, la forza agente sul filo vale:

$$\vec{F} = I \int_{\text{filo}} d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \cdot \left(\int_{\text{filo}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = 0$$



L'integrale è nullo (intendiamo vettoriale) su una linea chiusa.

concludo che la risultante delle forze esterne agenti sulla spina è nulla. Ne consegue che il cor non subisce alcuna accelerazione: ciò può non escludere la possibilità di avere un momento torcente.

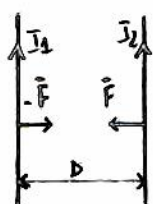
Interazione tra due fili paralleli e indefiniti, percorsi da corrente

Calcolando i campi ed induzione magnetica generati dai due fili l'uno nell'altro ed applicando la II^a formula di Laplace si dedurrà la forza per unità di lunghezza agente sui due fili.

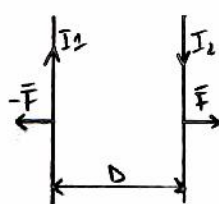
In definitiva questi due fili percorsi da correnti hanno lo stesso verso e si respingono se le correnti hanno versi contrari.

Il modulo delle forze di interazione per unità di lunghezza vale:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi D}$$



Attrazione



Repulsione

• **Prova matematica:** calcoliamo di un campo vettoriale lungo una linea:

Consideriamo un campo vettoriale \vec{A} e una linea infinitesima $d\vec{l}$ immersa in esso.

Affatto pochi di lunghezza infinitesima, l'elemento di linea può ritenersi rettilineo, con la sua direzione individuata dal vettore \hat{r} quindi: $d\vec{l} = dl \cdot \hat{r}$.

Definiamo ora l'elemento del campo vettoriale \vec{A} lungo una linea orientata $d\vec{l}$ le punti \vec{A} :

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{l} = A \cdot dl \cdot \cos(\alpha), \text{ dove } \vec{A} \text{ è il valore assunto dal campo vettoriale nel punto in cui passa } d\vec{l} \text{ e } \alpha \text{ è l'angolo formato da } \vec{A} \text{ e } d\vec{l}.$$

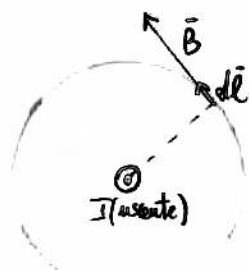
Sommando le circoscrizioni elementari lungo gli elementi di linee elementari otteniamo la circoscrizione in tutte le linee:

$$C_A(L) = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

• Calcoliamo di un campo di induzione magnetica \vec{B} generato da una corrente I nel centro di una circonferenza di raggio R , con I perpendicolare al piano in cui si trova:

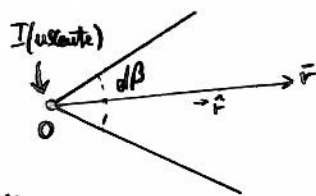
$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \quad (\text{legge di Biot-Savart}) \quad C_B(L) = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \oint_L dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

N.B.: il vettore campo magnetico è parallelo al vettore $d\vec{l}$ (vedi campo di Biot-Savart), per cui $\cos(\theta) = 1$.

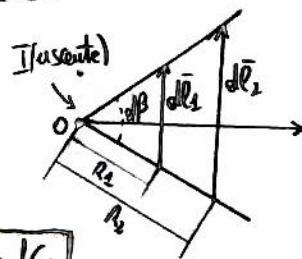


• **Teorema di Ampere in forme integrate**

Consideriamo una corrente rettilinea indefinita I , e nel punto O una ortogonale, e fissare del punto O , disegniamo una semicirconferenza γ di raggio r (si vede la figura). Intorno alla retta I consideriamo un angolo $d\beta$ con vertice in O . Studiamo ora come si comporta la circoscrizione elementare del campo \vec{B} generato dalla corrente I lungo le linee elementari dl_1 e dl_2 che sottendono l'angolo $d\beta$, scegliendo 2 particolari situazioni caratterizzate da diversi orientamenti delle linee elementari:



I° caso: dl_1 e dl_2 perpendicolari alle semicirconferenze γ : $|dl_1| = dl_1 \hat{e}$ e $|dl_2| = dl_2 \hat{e}$



Il campo magnetico a distanza R_1 vale, per la legge di Biot-Savart: $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot \hat{e}$, per cui:

$$dC_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = B_1 \cdot dl_1 \cdot \cos(\beta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot dl_1 \cdot \cos(\beta) \quad |dl_1| = R_1 \cdot d\beta \Rightarrow dC_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot R_1 \cdot d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\beta$$

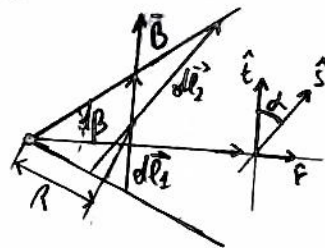
Tale risultato è indipendente dalla distanza R_1 , quindi, applicando la stessa procedura, $dC_1 = dC_2$

II° caso: dl_1 e dl_2 alla stessa distanza da O , con direzioni diverse: $|dl_1| = dl_1 \hat{e}$ e $|dl_2| = dl_2 \hat{e}$

$$\vec{B} = B \hat{e} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad dC_1 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = B \cdot dl_1 \cdot \cos(\beta) = B \cdot dl_1$$

$$dC_2 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = B \cdot dl_2 \cdot \cos(\alpha) \rightarrow (\hat{e} \cdot \hat{s}) = \cos(\alpha) \quad dl_1 = dl_2 \cdot \cos(\alpha) \quad (dl_1 \text{ è la proiezione di } dl_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dC_2 = B \cdot dl_1 = dC_1 \Rightarrow dC_1 = dC_2$$



Possiamo concludere da questi calcoli che la circoscrizione del campo magnetico generato dalla corrente I lungo due linee infinitesime dl_1 e dl_2 , che sottendono un angolo centrato dove passa I , è uguale, se prendiamo i due elementi di linea a distanza R da O alla stessa distanza, con orientamenti diversi.

Da tale conclusione, possiamo alle dimostrazioni vere e proprie del teorema.

• L'encirclatura del comp. magnetico generata da una corrente I lungo una qualunque linea chiusa L : 54

- Anche in queste analisi, consideriamo due particolari casi:

- I° caso: la corrente I è concatenata con la linea L :
 $I \rightarrow$ corrente nella linea indefinita, perpendicolare al piano del loop ed uscente da esso, concatenata alla linea L
 $L \rightarrow$ linea circolare di raggio R , centrata nel punto O per cui passa I .
- $d\vec{B} \rightarrow$ campo generato elementare con vertice in O

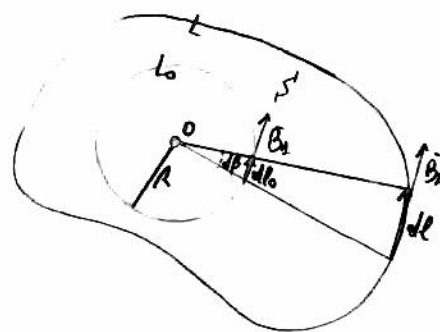
$$dC_B(d\vec{B}) = dC_B(d\vec{B}_O) \quad C_B(L) = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

N.B.: la superficie S può essere vista come l'insieme di infiniti campi uscenti da O , per cui la concatenazione su L è uguale a quella su L_0

In definitiva: $C_B(L) = \mu_0 \cdot I_{\text{conc}}$

- II° caso: la corrente I non è concatenata con la linea L :

- In questo caso le encirclature sono comunque uguali in modulo, ma il verso è opposto, in quanto $d\vec{B}_1$ ed $d\vec{B}_2$ hanno orientate in verso opposto
- Per cui: $C_B(L) = 0$



Tali risultati possono essere estesi, per il principio di sovrapposizione degli effetti, a più correnti. In tal modo si può dare il teorema di Ampere, di seguito enunciato:

• Teorema di Ampere:

- "L'encirclatura del comp. magnetico lungo una linea chiusa orientata è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate con la linea multiplata per la prima volta nel tratto nel vuoto:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_i I_{\text{conc}i} \quad \text{dualmente, se la encirclatura (lungo una linea chiusa) è nulla, la somma algebrica delle correnti concatenate alla linea è nulla.}$$

• Teorema di Ampere in forma differenziale:

- Consideriamo una densità di corrente \vec{J} . Fissata una linea chiusa L , la corrente concatenata con la linea L è il flusso del comp. \vec{J} attraverso una qualunque superficie S che si appoggi ad L :

$$\sum_i I_{\text{conc}i} = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \text{ per il th. di Ampere: } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{\text{conc}i} \Rightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- per il th. dell'encirclatura:

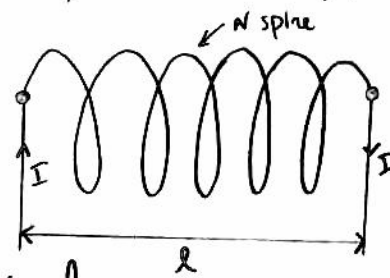
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- definite una superficie S' uguale per entrambi gli integrali, possiamo eguagliare i due integrali:

$$\text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \cdot \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}} \quad \left(\text{teorema di Ampere in forma differenziale} \right)$$

Il th di Ampere in forma differenziale collega il rotore del comp. \vec{B} con la densità di corrente in quel punto

- Il solenoide è costituito da un filo attraversato da una corrente I , avvolto in una superficie cilindrica per una lunghezza l , secondo N spire:



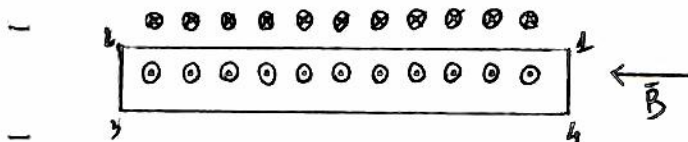
- Calcoliamo il campo magnetico \vec{B} generato dalle correnti che attraversano un solenoide come applicazione del th. di

- Ampere, supponendo che le spire sono molto addensate, e la lunghezza l sia molto grande rispetto alle dimensioni trasversali.

- (Tale condizione corrisponde a quella ideale di solenoide a lunghezza infinita con spire totalmente addensate da formare una superficie cilindrica). In queste circostanze il campo magnetico \vec{B} è nullo all'esterno del solenoide ed è uniforme al suo interno.

- Definiamo: $n = N/l$ (n è il numero di spire per unità di lunghezza)

- Effettueremo un taglio del solenoide con un piano perpendicolare per il suo asse di simmetria e considereremo il rettangolo 1234 applicando a tale percorso il th. di Ampere:



$$\oint_{1234} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

gli integrali sui tratti 23 e 14 sono uguali ed opposti, perciò la loro somma è nulla
- l'integrale sul tratto 34 è nullo in quanto \vec{B} è \perp all'esterno del solenoide

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot l$$

Per il th. di Ampere vale: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{conc} = \mu_0 \cdot n \cdot l \cdot I$

esplicitando: $B \cdot l = \mu_0 \cdot n \cdot l \cdot I \Rightarrow B = \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$ (camp. magnetico all'int. del solenoide)

• Equazioni di Maxwell totali:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad \text{n.b.: tali equazioni sono valide considerando i campi } \vec{B} \text{ ed } \vec{E} \text{ indipendenti tra di loro}$$

• Legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Neumann-Lenz:

- Consideriamo un camp di induzione magnetica \vec{B} in generale variabile da punto a punto e dipendente dal tempo. Se L una linea chiusa contenuta nel dominio di \vec{B} . La legge dell'induzione elettromagnetica afferma che la intensità del camp elettromotore \vec{E}_i^{TOT} lungo la linea chiusa L è uguale alla derivata totale rispetto al tempo, cambiata di segno, del flusso del camp \vec{B} attraverso una qualunque superficie S che si appiaccia alla linea L :

$$\oint_L \vec{E}_i^{\text{TOT}} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \rightarrow \varphi_B(t) \quad \text{essendo: } \oint_L \vec{E}_i^{\text{TOT}} = \oint \text{e.m. (= forza elettromotrice), si scrive:}$$

$$\oint \text{e.m.} = - \frac{d}{dt} \varphi_B(t)$$

- È da evidenziare il fatto che, anche se il flusso non è dipendente dal tempo, esso potrebbe variare anche solo perché la linea L è in movimento o si deforma: in tal caso il prodotto scalare $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ varia, e di conseguenza anche il flusso. Ma variare del flusso si ha anche quando \vec{B} non è uniforme nello spazio e la linea L è in movimento.
- Tali considerazioni evidenziano che, in realtà, non è detto che se \vec{B} non è esplicitamente variabile nel tempo la f.e.m. lungo L è necessariamente nulla, poiché esistono altri fattori che rendono il flusso variabile.

Quando la linea L è un filo conduttore di resistenza R è possibile calcolare la corrente che circola nel filo:

$$\oint \text{e.m.} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \Rightarrow i = \frac{\oint \text{e.m.}}{R} \Rightarrow i = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_B(t)$$

Quando il filo è aperto non c'è una corrente stazionaria, ma è comunque presente una differenza di potenziale ai suoi capi.

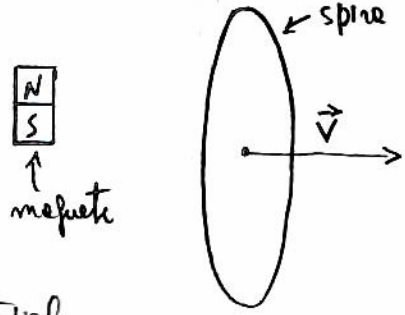
Nota la considerazione fatta in precedenza sulle molteplicità delle curve che possono produrre la variazione del flusso di \vec{B} , evidenziamo alcuni casi che producono lo stesso effetto delle leggi di F-N-L:

• INDUZIONE DI 1° SPECIE:

Consideriamo un magnete fermo, che genera nello spazio circostante un camp magnetico \vec{B} stazionario, ma non uniforme, e una spira conduttrice. Allontaniamo la spira dal magnete con velocità \vec{v} . Si genera nella spira una corrente solo quando la spira è in movimento.

Se si elimina la spira al magnete la corrente circola nella spira: in senso contrario rispetto e quando era allontanata. Ciò può essere spiegato in 2 modi:

• Gli elettroni contenuti nella spira si muovono con velocità \vec{v} nel camp \vec{B} spira, essendo soggetti alla forza di Lorentz prodotta, muovendosi, una differenza di potenziale.



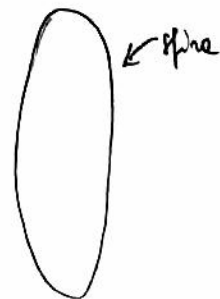
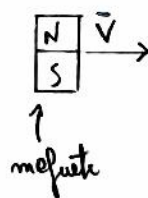
- Quando il camp B non muove nello spazio, facendo la spira è in moto solo il filo di B attraverso la superficie e cui si applica la spira. C'è dunque, al movimento della spira, una variazione del flusso di B che genera, per la legge di $F-N-L$, una fem, responsabile e una volta di una corrente che circola nello spira. Siamo nella situazione in cui il flusso del camp magnetico varia solo per la variazione temporale di B . Situazioni in cui vi è un conduttore in moto in un camp magnetico costante nel tempo (ma non necessariamente unitario nello spazio) sono classificate come fenomeni di induzione elettromagnetica di I° specie.

• INDUZIONE DI II° SPECIE:

Qualmente, sono definiti fenomeni di induzione di II° specie quelli in cui non è il conduttore e muoversi, ma la sorgente del camp, e quindi il camp stesso.

Consideriamo sempre il magneti e la spira del caso precedente. In questo caso, però, la spira è fissa ed è il magneti e muoversi con velocità \vec{v} .

Anche in questo caso vi è una fem e quindi una corrente indotta nella spira. In tale situazione, però, non vi è alcun contrasto con la legge di Lorentz: la fem indotta dipende dal moto relativo tra i due componenti.



Le leggi dell'induzione elettromagnetica è valida anche nel caso in cui non c'è movimento di nessuno dei due componenti, come nel caso di due spire: se solo nella prima spira c'è una corrente variabile nel tempo, tale variazione dà origine a un camp di induzione magnetica variabile anche esso nel tempo, che a sua volta genera un flusso magnetico (variabile) che crea una fem sia nella spira stessa (fem autoindotta) che nell'altra spira (fem indotta), provocando quindi il processo di corrente indotta.

Al fine dell'induzione elettromagnetica non è quindi importante sapere su quale moto o modalità avviene la variazione del flusso magnetico nel tempo (può avvenire indistintamente su fenomeni di I° o II° specie): l'importante è individuare le leggi di variazione del flusso nel tempo.

La risoluzione dei fenomeni di I° e di II° specie viene messo introducendo le teorie della relatività ristretta di Einstein. Considero al riguardo una spira rettangolare con due lati coincidenti con gli assi x e y , immersa in un camp di induzione magnetica orientatamente lungo x : $B(x) = B_0 x$. La spira si muove con velocità costante $v = x/t$, mantenendo sempre il suo lato coincidente con l'asse x . È possibile derivare il fenomeno osservato della "forza dell'orientatore".

• Descrizione dell'orientatore relativo con gli assi x, y, z (approccio relativistico): l'orientatore vede la spira che si muove e il flusso del camp B che cresce, dato che si muove verso di camp più intenso. Dunque attribuisce la variazione del flusso al moto della spira.

• Descrizione dell'orientatore relativo con la spira: l'orientatore vede la spira fissa, ma nota un aumento nel tempo del flusso del camp magnetico attraverso la spira, attribuendo la variazione del flusso alla variazione del camp B nella spira.

Autoinduzione

Se un solo circuito attraversato da una corrente variabile nel tempo presenta il fenomeno di induzione elettromagnetica.

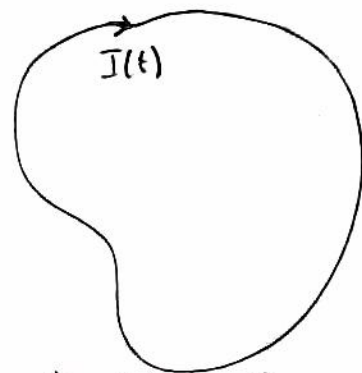
Consideriamo un circuito attraversato da una corrente $I(t)$. La corrente genera

un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$, che è perpendicolare, istante per istante,

a $I(t)$ ed \vec{B} . Vi sarà dunque un flusso del campo \vec{B} attraverso la superficie S che

sarà quella del circuito, che risulta essere stesso proporzionale a $I(t)$:

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = L \cdot I(t)$$



La costante L tra $\Phi_B(t)$ e $I(t)$ è il coefficiente di autoinduzione o semplicemente induttanza. È più definito come il rapporto fra il flusso magnetico concatenato con il circuito e la corrente che fluisce nel circuito stesso:

$L = \frac{\Phi_B(t)}{I(t)}$ Tale coefficiente dipende esclusivamente delle geometrie del problema. L'unità di misura di L è:

$$[L] = \frac{[W]}{[A]} = [H] \text{ (Henry)} \quad 1H = \frac{1W}{1A}$$

È possibile scrivere le leggi dell'induzione elettromagnetica utilizzando L :

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{dt} \frac{d}{dt} \left(\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = - \frac{1}{dt} \frac{d}{dt} (L \cdot I(t)) \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{dt} (L \cdot I(t)) \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

(legge di autoinduzione elettromagnetica)

Definitiva, mostra come l'induzione elettromagnetica si manifesta in un circuito in rapporto ad una corrente variabile nel tempo.

• Coefficiente di autoinduzione in un solenoide:

Vogliamo calcolare il flusso del campo \vec{B} concatenato con le N spire di un solenoide e, conseguentemente, determinare il coefficiente L che lo mette in relazione con la corrente $I(t)$ che lo attraversa.

1° \rightarrow n° di spire per unità di lunghezza $n = \frac{N}{l}$, dove N è il numero di spire ed l la lunghezza del solenoide.

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \Rightarrow \Phi_B(S) = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \cdot S \Rightarrow \Phi_{B,tot} = N \cdot \Phi_B(S) \Rightarrow \Phi_B = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot I \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S}$$

\downarrow flusso concatenato con una spira \downarrow flusso concatenato con N spire

Mutua Induzione

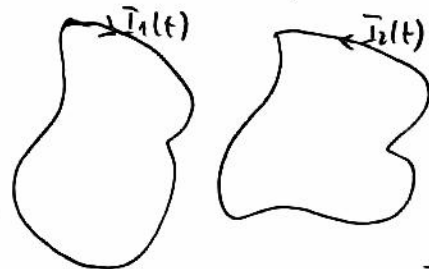
Consideriamo due circuiti, entrambi fermi, attraversati dalle correnti $I_1(t)$ ed $I_2(t)$. Come abbiamo precedentemente visto, la

corrente $I_1(t)$ genera un campo di induzione magnetica $\vec{B}_1(t)$ nel suo spazio circostante. Analogamente, un flusso $\Phi_2(t)$ concatenato

con il secondo circuito, per effetto del campo $\vec{B}_1(t)$ generato da $I_1(t)$.

$$\Phi_2(t) = M_{12} \cdot I_1(t)$$

$M \rightarrow$ costante di proporzionalità che lega il flusso del campo magnetico attraverso il secondo circuito con la corrente che attraversa il primo circuito (e viceversa, per simmetria, il campo \vec{B}_2).



M è definito come coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti; in particolare tra l'elemento 1 e l'elemento 2. 59

La tensione del primo $\varphi_1(t)$ genera una f.e.m. nell'elemento 2 pari a: $\text{fem}_2 = \frac{d}{dt}(\varphi_2(t)) = -\frac{d}{dt}(M_{12} \cdot I_1(t)) = -M_{12} \cdot \frac{d}{dt}(I_1(t))$

In maniera del tutto analoga, anche la corrente $I_2(t)$ genera un campo di induzione magnetica $B_2(t)$, quindi vi sarà un flusso di tale campo concatenato all'elemento 1, che vale: $\varphi_1(t) = M_{21} \cdot I_2(t)$. E genera una f.e.m. nell'elemento 1 pari a: $\text{fem}_1 = -M_{21} \cdot \frac{d}{dt}(I_2(t))$.

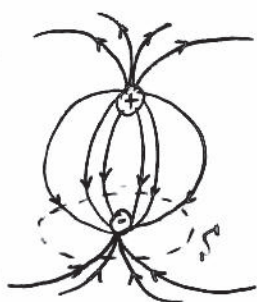
Dimostriamo che $M_{12} = M_{21}$, che chiameremo M (coeff. di mutua induzione), facendo:

$$\begin{cases} \varphi_2(t) = M \cdot I_1(t) \rightarrow \text{fem}_2 = -M \cdot \frac{d}{dt} I_1(t) \\ \varphi_1(t) = M \cdot I_2(t) \rightarrow \text{fem}_1 = -M \cdot \frac{d}{dt} I_2(t) \end{cases} \quad M = \frac{\varphi_2(t)}{I_1(t)} = \frac{\varphi_1(t)}{I_2(t)}$$

N.B.: M dipende dalle geometrie dei circuiti e dalla loro posizione. Si misura in Henry

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (1) \\ \text{div } \vec{B} = 0 & (2) \\ \text{rot } \vec{E} = 0 & (3) \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & (4) \end{cases} \quad (\text{Considerando } \vec{E} \text{ e } \vec{B} \text{ indipendenti})$$

- (1) La prima equazione è in pratica l'espressione del teorema di Gauss espresso in forme differenziale. È da notare che la divergenza del campo elettrostatico non è nulla, ma assume un valore pari alla densità di carica in quel punto fatto lo esente dielettrico nel vuoto. Questa relazione differenziale può essere integrata, e facendo linee, considerando una superficie contenente una carica netta (pari ad una densità volume o una interna ρ) si ottiene che le linee del campo elettrostatico non sono linee chiuse continue, ma hanno una sorgente e (talvolta) un pozzo. Perciò, per una qualunque superficie chiusa, il flusso del campo che la attraversa può essere non nullo, e, ad esempio, la sorgente del campo (e quindi delle linee di campo) è interna alla superficie e il pozzo (se presente) all'esterno della stessa. Possiamo considerare l'esempio di una superficie che racchiude una delle due cariche di un dipolo elettrico:



in questo caso le linee di campo hanno sorgente nella carica positiva e pozzo nell'altra negativa. Attraverso la superficie S che racchiude la carica positiva entrano molte linee di campo entranti; mentre il flusso del campo \vec{E} attraverso S è diverso da 0, in particolare è positivo.

- (2) $\text{div } \vec{B} = 0$: tradotta in termini fisici, essendo le linee del campo magnetico delle linee chiuse il flusso del campo magnetico \vec{B} attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è sempre nullo: le linee di forza di \vec{B} non hanno una sorgente o un pozzo, quindi, se si prende una qualsiasi superficie S immersa in un campo \vec{B} , le linee di forza passeranno da S in più punti, con flusso netto attraverso S pari a 0. (tutto ciò che entra è pari a ciò che esce).

- (3) $\text{rot } \vec{E} = 0$: dice che $\text{rot } \vec{E} = 0$ vuol significare che le linee di forza del campo elettrostatico non formano rotazioni nelle cariche. Infatti, $\text{rot } \vec{E} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ è conservativo irrotazionale. L'espressione delle componenti di \vec{E} , applicando meccanicamente il th. di Stokes: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S 0 \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Ma che le componenti in un punto chiuso di \vec{E} è nullo vuol dire che il lavoro per spostare una carica in un punto chiuso rispetto al campo è pari a 0.

- (4) $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$: questa equazione deriva dal th. di Ampère, espresso in forme locali. Analogamente al campo elettrico, il campo magnetico \vec{B} genera delle rotazioni in quanto $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (infatti, si vede il comportamento di una carica immersa in un campo magnetico).

Derivate temporali del flusso di un camp vettoriale dipendenti, in generale, dallo spazio e dal tempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial}{\partial t} \vec{C} \cdot d\vec{S} + \int_{S(t)} \text{div} \vec{C} \cdot \vec{v} dS - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{C} d\vec{l}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 superficie costante, camp costante, camp costante,
 camp variabile superficie variabile frontiera variabile

Si vuole riscrivere le leggi dell'elettromagnetismo applicando le derivate temporali del flusso di un camp vettoriale espresso descritto:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_S \text{div} \vec{B} \cdot \vec{v} dS - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l}$$

$$\text{F.E.M.} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \oint_{\partial S} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l} \quad \left| \oint_{\partial S} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} + \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l} = \oint_{\partial S} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} \right.$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Th. di Stokes e di II membro} \\ \oint_{\partial S} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = \oint_{\partial S} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{array} \right. \Rightarrow \oint_{\partial S} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\partial S} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

N.B.: l'operatore integrale di I° e di II° membro si semplifica in quanto le rette delle superficie \vec{v} e \vec{B} coincidono.
 scegliendo le stesse frontiere, è possibile esprimere le funzioni integrate

Teorema di Ampere-Maxwell in forme differenziali

Il teorema di Ampere vale solo in condizioni stazionarie. Infatti, partendo dalle sue forme differenziali:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{J} \quad \left| \text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0 \Rightarrow \mu_0 \text{div} \vec{J} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{J} = 0 \right.$$

ricordando l'espressione di continuità: $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ si ha che $\text{div} \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ vale solo in condizioni stazionarie.

È ragionevole tentare quindi di modificare il teorema di Ampere in modo che risulti valido anche in condizioni non stazionarie.
 di variabilità nel tempo, quindi in modo che sia compatibile con l'espressione di continuità (ossia col principio di conservazione della carica): $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

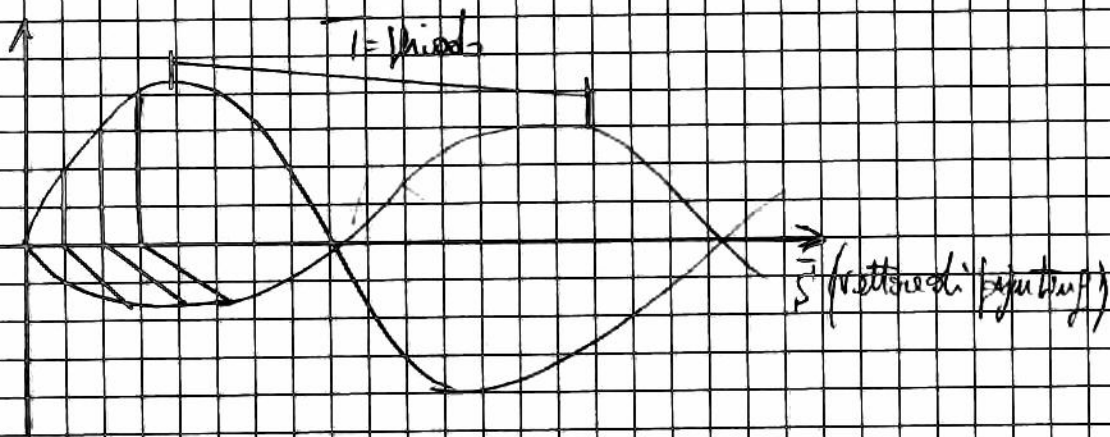
Sufficiente quindi che nel th di Ampere manchi qualcosa: $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{X})$, dove \vec{X} è un termine che ha le dimensioni fisiche di \vec{J} . Affatto che div di I° e di II° membro: $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{div}(\vec{J} + \vec{X}) \Rightarrow \text{div} \vec{J} + \text{div} \vec{X} = 0$

Nel th di Gauss vale: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}$. Per ritrattare nell'eq. di continuità: $\text{div} \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{J} = - \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{ritrovando l'espressione di div} \vec{J} \text{ con l'eq. di continuità nell'espressione } \text{div}(\vec{J} + \vec{X}) = 0 \Rightarrow \vec{X} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Le onde elettromagnetiche hanno origine da un sistema di cariche accelerate e producono un campo $E(x,y,z)$ e $B(x,y,z)$ correlati tra loro verso e valore in tempi successivi e in diverse regioni dello spazio.



Proprietà delle onde:

- E e B si propagano alla stessa velocità $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
- I moduli dei campi sono legati dalla relazione $B = \frac{E}{c}$
- E e B sono ortogonali tra di loro.
- Il verso del prodotto $E \times B$ definisce il verso di propagazione dato da \vec{S} , il vettore di Poynting: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E \times B$ (Energie nell'unità di tempo)
- Le onde elettromagnetiche non si separano ma sono interconnesse.

EQUAZIONE DELLE ONDE:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

PDE del I° ordine: (DAGLI APPUNTI DI) 1.2
MATematica III

$$e_1 u_{x_1} + e_2 u_{x_2} + e_3 u + d = 0$$

Se e_1, e_2, e_3 non sono tutte le funzioni di x_1 e x_2 l'equazione è a coefficienti variabili, altrimenti è a coefficienti costanti.

PDE del II° ordine:

$$e_{11} u_{x_1 x_1} + e_{12} u_{x_1 x_2} + e_{22} u_{x_2 x_2} + b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} + e_3 u + d = 0$$

se $b = 0 \Rightarrow$ equazione omogenea

se $b \neq 0 \Rightarrow$ equazione non omogenea.

Le PDE del II° ordine possono essere classificate in:

- ellittiche
- iperboliche
- paraboliche

Creando la matrice:

$$(e_{12} = e_{21})$$

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & \frac{e_{12}}{2} \\ \frac{e_{21}}{2} & e_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = e_{11}e_{22} - \frac{(e_{12})^2}{4}$$

A

$|A| > 0$ la curva rappresenta un'ellisse e l'equazione è ellittica
 $|A| = 0$ la curva rappresenta una parabola e l'equazione è parabolica
 $|A| < 0$ la curva è un'iperbole e l'equazione è iperbolica

• L'equazione di Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 = \text{l'equazione è ellittica}$$

• L'equazione del calore: $u_t - u_{xx} = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{l'equazione è parabolica}$$

$$\text{Se } u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

1.1

$$u(x_1, x_2)$$

Supponendo che le derivate di tale funzione siano continue, si possono calcolare le derivate:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^p \partial x_2^q}, \quad p+q=m$$

le nuove derivate possibili.

Un'equazione differenziale alle derivate possibili è un'equaz. del tipo:

$$f\left(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^p \partial x_2^q}\right) = \phi$$

L'ordine di un'equazione con derivate è definito dall'ordine massimo delle derivate possibili che compare.

• EQUAZIONE DELLA CORDA (O DELLE ONDE):

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}$$

$$c^2 = \frac{\tau}{\mu}$$

Risolvendo tale equazione si ottiene il valore dello spostamento dell'origine al tempo t .
 τ rappresenta la tensione della corda e μ la massa per unità di lunghezza.

• EQUAZIONE DEL CALORE:

$$u_t = k \Delta u \quad \rightarrow k \text{ è il coefficiente di diffusività}$$

dove $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ $u(x, y, z, t)$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ $\Delta u = \phi$ è l'equazione di Laplace quando la temperatura è costante
 $u_t = \phi \Rightarrow$ la temperatura non varia nel tempo.

• EQUAZIONE DI LAPLACE:

$$\nabla^2 u = \phi \quad \Delta u = \phi$$

$$u_{xx} + u_{yy} = \phi$$

L'equazione di Laplace si ottiene anche ~~non~~ ottenendo prendendo $u_t = \phi$ nell'eq. del calore.

• L'equazione delle onde (onde elettromagnetiche).

2.1

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & \phi \\ \phi & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \phi = 1 \Rightarrow \text{L'equazione è iperbolica}$$

Riassunto Corso

GEOMETRIA

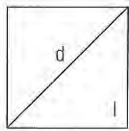
A= Area

2p= Perimetro

d= Diagonale

h= Altezza

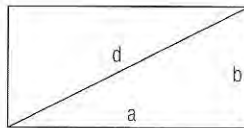
l= Lato



Quadrato

$$A = l^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$2p = 4l$$

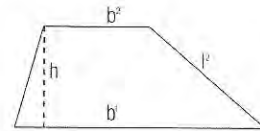


Rettangolo

$$A = a \cdot b$$

$$2p = 2(a + b)$$

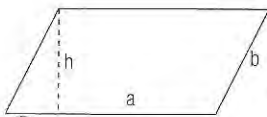
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Trapezio qualsiasi

$$A = \frac{1}{2} h (b_1 + b_2)$$

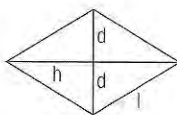
$$2p = b_1 + b_2 + l_1 + l_2$$



Parallelogrammo

$$A = a \cdot h$$

$$2p = 2(a + b)$$



Rombo

$$A = l \cdot h = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$2p = 4l$$

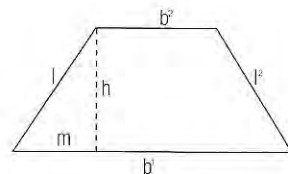
$$d_1^2 + d_2^2 = 4l^2$$



SFERA

$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$



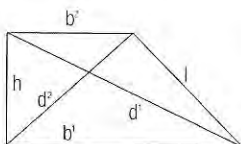
Trapezio isoscele

$$A = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h$$

$$2p = b_1 + b_2 + 2l$$

$$l^2 = h^2 + m^2$$

$$b_1 = b_2 + 2m$$

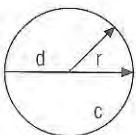


Trapezio rettangolo

$$A = \frac{1}{2} h (b_1 + b_2)$$

$$2p = b_1 + b_2 + l + h$$

$$d_2^2 = h^2 + b_2^2 \quad d_1^2 = h^2 + b_1^2$$

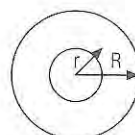


Circonferenza e cerchio

$$C = 2\pi \cdot r = d \cdot \pi$$

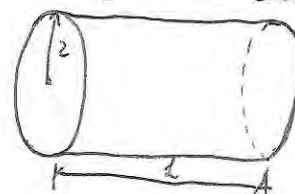
$$\pi = 3,1415927$$

$$A = r^2 \cdot \pi$$



Corona circolare

$$A = (R^2 - r^2) \pi$$



CILINDRO CIRCOLARE RETTO

$$A_{\text{lat}} = 2\pi r h$$

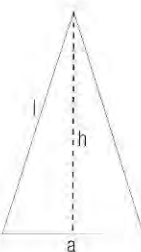
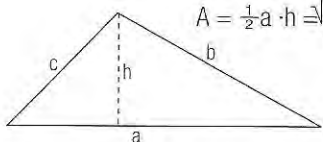
$$V = \pi r^2 h$$

$$A_{\text{tot}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

Triangolo qualsiasi

$$2p = a + b + c$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h \Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)$$

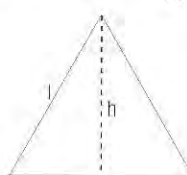


Triangolo isoscele

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$2p = a + 2l$$

$$l = \frac{(a)^2 + h^2}{2}$$



Triangolo equilatero

$$A = \frac{1}{2} l \cdot h$$

$$h = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

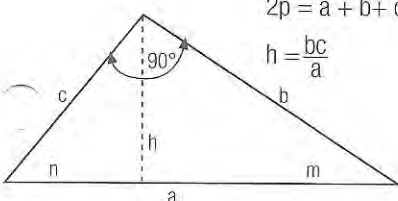
$$2p = 3l$$

Triangolo rettangolo

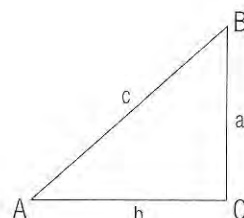
$$A = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot c$$

$$2p = a + b + c$$

$$h = \frac{bc}{a}$$



Teorema di Pitagora

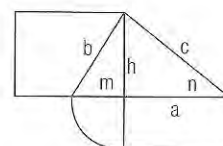


$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c$$

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a$$

$$\sqrt{c^2 - a^2} = b$$



Teorema di Euclide

$$h = \sqrt{m \cdot n}$$

$$b = \sqrt{a \cdot m}$$

$$c = \sqrt{a \cdot n}$$

$$a = \sqrt{m + n}$$

DIVERGENZA

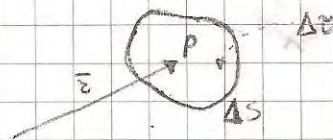
FORMA ASSOLUTA (NON RICHIEDE L'ADOZIONE DI UN SISTEMA DI COORDINATE)

Consideriamo un campo vettoriale \vec{A} definito in un dominio X dello spazio aperto e semplicemente connesso. Sia P un punto del dominio X individuato dal vettore posizione \vec{r} .

Sia inoltre ΔS una superficie chiusa orientata verso l'esterno, che comprende nel suo interno il punto P . Denotiamo con $\Delta \tau$ il volume delimitato da ΔS .

Si definisce divergenza del campo vettoriale \vec{A} nel punto P il limite per $\Delta \tau$ che tende a zero del rapporto tra il flusso del campo vettoriale \vec{A} attraverso ΔS e il volume $\Delta \tau$.

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta \tau}$$



La divergenza è una grandezza scalare che indica la capacità del punto P di comportarsi come sorgente, elemento neutro, pozzo del campo vettoriale \vec{A} e ricorda che il flusso su una data volume può essere totale positivo, nullo o negativo. In definitiva la divergenza è un'operatore che misura la tendenza di un campo vettoriale a convergere o divergere verso un punto del campo.

FORMA CARTESIANA

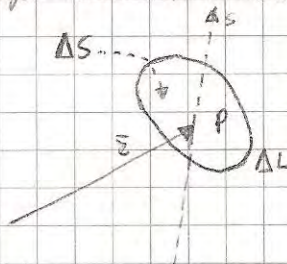
$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ROTORE

FORMA ASSOLUTA

Consideriamo un campo vettoriale \vec{A} definito in un dominio X dello spazio aperto e semplicemente connesso. Sia P un punto del dominio X individuato dal vettore posizione \vec{r} ed α una retta orientata finché, penetrando per P . Sia ΔS una superficie piana, perpendicolare alla retta α , in modo che comprenda il punto P . Denotiamo con ΔL la linea chiusa che delimita ΔS . Si definisce rotore del campo vettoriale \vec{A} nel punto P , secondo la retta orientata α , il limite per ΔS che tende a zero del rapporto tra la circolazione del campo vettoriale \vec{A} lungo la linea chiusa ΔL e la superficie ΔS :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta L} \vec{A} \cdot d\vec{L}}{\Delta S}$$



Nel prendere il limite suddetto, il punto P deve sempre rimanere interno alla superficie ΔS e la superficie stessa deve sempre mantenersi piana e sempre perpendicolare alla retta α . Inoltre, la circolazione va effettuata secondo il verso indicato dall'orientamento della linea chiusa.

In definitiva il rotore indica la tendenza del campo vettoriale \vec{A} a girare lungo una linea ΔL e nella direzione della retta α . Il rotore è una grandezza vettoriale.

FORMA CARTESIANA

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia A un campo vettoriale di classe C^1 in un dominio aperto X .

Il flusso di un campo vettoriale A attraverso la superficie chiusa S è pari all'integrale della divergenza moltiplicata nel volume τ delimitato da S .

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

TEOREMA DELLA CIRCUITAZIONE (O DI STOKES)

Il flusso del rotore di \vec{A} attraverso una qualsiasi superficie S che abbia L come frontiera è uguale alla circolazione di \vec{A} lungo L

$$\int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

FLUSSO

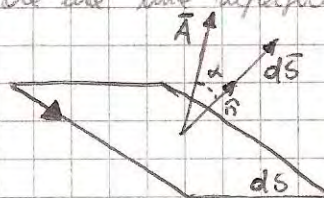
MATEMATICAMENTE: il flusso di un campo vettoriale \vec{A} attraverso una superficie orientata S è definito come l'integrale del prodotto scalare del campo con il vettore normale alla superficie, esteso su tutta la superficie stessa.

$$\Phi(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \text{dove } d\vec{S} = dS \hat{n} \quad \text{cioè } d\vec{S} \text{ è il vettore di modulo } dS, \text{ con direzione e verso del vettore } \hat{n}. d\vec{S} \text{ rappresenta le superfici infinitesime orientate. (*)}$$

FISICAMENTE: si tratta di una grandezza fisica usata in fisica per quantificare la quantità di flusso che attraversa una data superficie. Se tale grandezza è esprimibile in funzione di un campo vettoriale, allora il flusso è la quantità del campo intercettata da una superficie.

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = A dS \cos \alpha$$

FLUSSO INFINITESIMO



(*) L'orientamento della superficie dS può essere correlato al verso di percorrenza del bordo della superficie stessa, il quale a suo volta è individuato tramite la regola della mano destra applicata al vettore \hat{n} .

CIRCUITAZIONE

Per calcolare in termini di integrali curvilinei di una forma differenziale estesa ad una curva chiusa. Poiché le componenti di una forma differenziale possono essere le componenti di un dato campo \vec{A} associato alle forme, la circolazione può essere scritta come:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

dove \vec{A} = campo vettoriale
 $d\vec{r}$ = vettore tangente alle curve Γ
 Γ = curve
 dr = elemento curvilineo sotto forma differenziale.

(**) Per integrali curvilinei in termini di integrali in cui le funzioni da integrare si valutano lungo una curva, in altri parole l'integrale curvilineo descrive l'effetto del vettore di un dato campo vettoriale su ogni punto di una data curva.

ESEMPIO:

Un esempio di integrale curvilineo è il lavoro compiuto dalle forze del campo, ma un oggetto spostato attraverso un campo lungo una data traiettoria, cioè:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

ALTRI OPERATORI DIFFERENZIALI

GRADIENTE: Sia A un campo scalare. Dico gradiente scalare A , il campo vettoriale le cui componenti sono le derivate parziali di A rispetto a x, y, z cioè:

$$\text{grad } A = \vec{\nabla} A \rightarrow \text{FORMA ASSOLUTA} \quad \text{grad } A = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \hat{i}, \frac{\partial A}{\partial y} \hat{j}, \frac{\partial A}{\partial z} \hat{k} \right) \rightarrow \text{FORMA CARTESIANA}$$

LAPLACIANO: Sia A un campo scalare o vettoriale. Dico laplaciano di A la divergenza del gradiente di A .

$$\text{div}(\text{grad } A) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A) = \nabla^2 A \rightarrow \text{FORMA ASSOLUTA}$$

$$\text{div}(\text{grad } A) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \rightarrow \text{FORMA CARTESIANA}$$

CAMPO CONSERVATIVO: POTENZIALE SCALARE

Sia \vec{A} un campo vettoriale irrotazionale in un certo dominio, tale cioè che in ogni punto di quel dominio il rotore è nullo: $\text{rot } \vec{A} = 0$ (in tal caso il campo \vec{A} si dice conservativo).

Allora possiamo scrivere che il campo \vec{A} è pari al gradiente di un campo V scalare detto potenziale scalare.

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A} = \vec{\nabla} V$$

DIMOSTRAZIONE (FORMA CARTESIANA)

Bisogna dimostrare che il rotore del gradiente di V è nullo, cioè:

$$\text{rot}(\text{grad } V) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \hat{k}$$

per il th. di Schwarz le derivate seconde sono uguali quindi:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{rot}(\text{grad } V) = 0$$

CAMPO SOLENOIDALE: POTENZIALE VETTORE

Se \vec{A} è un campo vettoriale solenoideale, tale cioè che in ogni punto (di un certo dominio) la divergenza è nulla: $\text{div } \vec{A} = 0$, esso può esprimersi come il rotore di un campo vettoriale \vec{Z} (il suo potenziale vettore):

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A} = \text{rot } \vec{Z}$$

DIMOSTRAZIONE

Bisogna dimostrare che $\text{div}(\text{rot } \vec{Z}) = 0$ infatti:

$$\text{rot } \vec{Z} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z_z}{\partial y} - \frac{\partial Z_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial z} - \frac{\partial Z_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Z_y}{\partial x} - \frac{\partial Z_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Potendo:

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{Z}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z_z}{\partial y} - \frac{\partial Z_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z_x}{\partial z} - \frac{\partial Z_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Z_y}{\partial x} - \frac{\partial Z_x}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 Z_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 Z_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Z_y}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y \partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Le quantità all'interno delle parentesi nell'ultimo passaggio sono uguali per il th. di Schwarz, dunque risulta che $\text{div}(\text{rot } \vec{Z}) = 0$

RELAZIONI DI 2° ORDINE DEL NABLA

	grad	div	rot
grad	temore	grad div	temore
div	lepleveno	impossibile	zero
rot	zero	impossibile	grad div - lepleveno

FORZA DI COULOMB

È fatto supponendo che date due particelle o cerchi sferici con cariche di modulo q_1 e q_2 e separate da una distanza z , le forze elettrostatiche di attrazione o repulsione risultano tre due esse le interazioni.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \rightarrow \text{FOUR SCALARS}$$

$$\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{z_{12}^2} \hat{z}_{12} \rightarrow \text{FOUR VECTORS!}$$

OSSERVAZIONI:

1. Le forze di Coulomb \vec{F} dirette sempre lungo la direzione congiungente le due cariche e tale direzione \hat{r} data dal vettore \hat{r} .
2. Il verso delle forze di Coulomb dipende dal tipo di carica:
 - cariche dello stesso segno si respingono \rightarrow forze repulsive dirette verso l'esterno
 - cariche di segno opposto si attraggono \rightarrow forze attrattive dirette verso l'interno
3. L'intensità delle forze di Coulomb dipende dal tipo di materiali in cui esse si presentano. Le costanti ϵ_0 e ϵ dette costanti dielettriche nel vuoto, ma tale costante viene al variare delle proprietà del materiale dielettrico considerato.
4. Il 4π che compare nelle formule delle forze di Coulomb include l'angolo pieno spaziale. Per capire tale concetto introduciamo l'angolo solido.

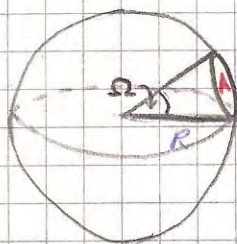
ÂNGULO SÓLIDO

Nel pieno un empolo è come una murea dell' spessore di due umicelli
eventi lo stesso oppure



$$\theta = \frac{s}{R} = \left[\frac{\text{arco da circonferenza}}{\text{raggio}} \right] \rightarrow \text{def. radiante}$$

Nello spazio tridimensionale il concetto di angolo si induce dall'apertura di un cono la cui base è la circonferenza sottesa ad una porzione di sfera.



$$A = \Omega R^2$$

dove $A =$ area della circonferenza sottesa
ed una porzione di sfera

Ω = emfale solido

$$\Omega = \frac{A}{R^2} = \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^2} \right] \rightarrow \text{def. adimensionale}$$

5. PP π nelle formule di Coulomb a ricordo di le carica hanno superficie riferite e soprattutto che l'espressione delle forze le ummette riferce, il che significa che le forze di Coulomb dipende del ceppo di interazione fra due cariche.

ELETTROSTATICA

Studio delle interazioni tra campi elettrici non dipendenti del tempo.

CANPO ELETTROSTATICO

Si definisce campo elettrostatico generato da una carica puntiforme, il rapporto

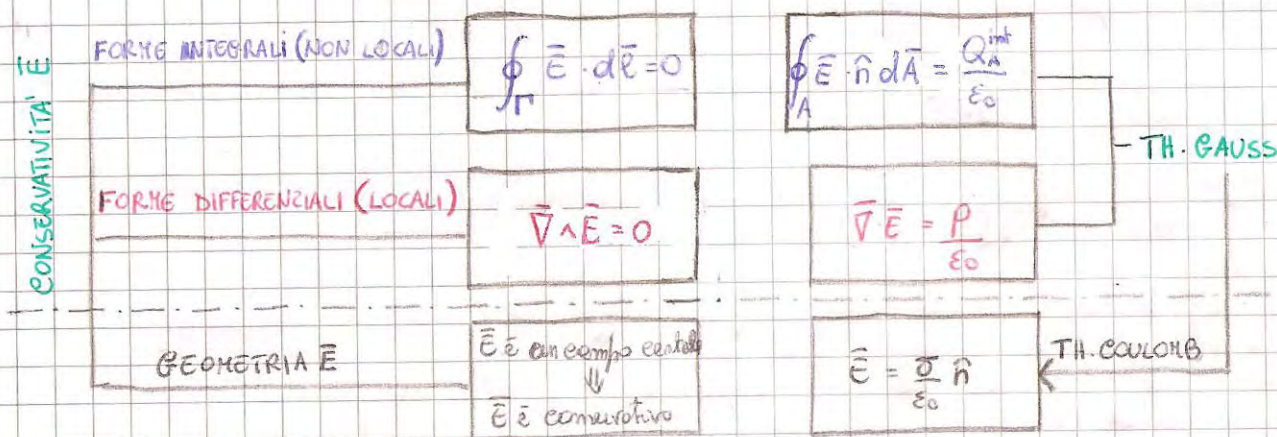
$E = \frac{F}{q}$ dove $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{z^2}$ è la forza una carica Q esercita su una carica q posta in un punto dello spazio P a distanza z da Q

OSSERVAZIONI:

1. Il campo \vec{E} è un campo vettoriale e ogni vettore \vec{E} è diretto ad \vec{v} lo stesso verso del vettore \vec{F} .
2. Il campo \vec{E} è un campo scalare. Questo è vero considerando il fatto che l'espressione delle forze \vec{F} le sommative fornisce il che significa che tutte le forze agiscono perpendicolarmente alle tangenti delle curve che compongono la curva.
3. Il campo \vec{E} è conservativo.

SCHEMA SEMPLIFICATIVO

4 EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROSTATICA



TEOREMA DI GAUSS (FORMA INTEGRALE)

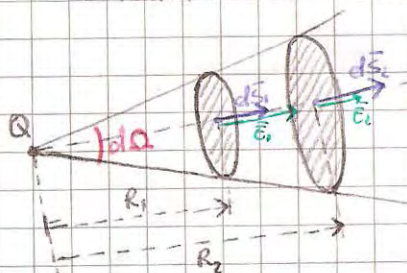
ENUNCIATO: Il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa, orientata verso l'esterno, è uguale alla somma algebrica delle cariche interne alla superficie, diviso la costante dielettrica del vuoto

$$\Phi_E(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

PREMESSA

Prima di procedere con la dimostrazione è utile studiare come si comporta il flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme Q attraverso due superfici che racchiudono un angolo solido.

I° CASO: Due superfici elementari dS_1 e dS_2 perpendicolari alle raggiante \vec{e} e aventi lungo il raggio \vec{e} e le distanze rispettivamente R_1 e R_2 dalla carica Q .



Poiché le superfici sono orientate lungo \vec{e} si ha:

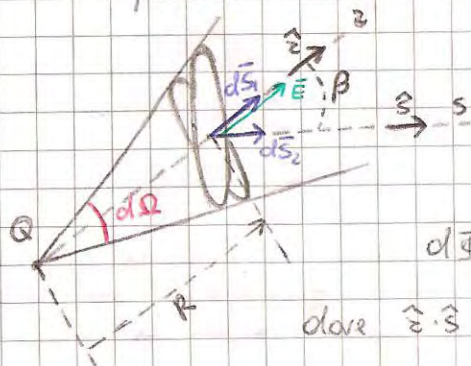
$$d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{e} \quad \text{e} \quad d\vec{S}_2 = dS_2 \vec{e}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1^2} \vec{e} \Rightarrow d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1^2} dS_1$$

ricordando che $dS_1 = d\Omega R_1^2$ (def. steradiano) si ha
 poiché non vi è più dipendenza dalle distanze si evince: $d\Phi_1 = d\Phi_2$

$$d\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1^2} d\Omega R_1^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q d\Omega$$

II° CASO: Due superfici elementari dS_1 e dS_2 distanti R dalla carica Q e orientate rispettivamente con i versori \vec{e} ed \vec{s} .



$$d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{e} \quad , \quad d\vec{S}_2 = dS_2 \vec{s}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \vec{e} \quad d\Phi_1 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS_1$$

$$d\Phi_2 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS_2 (\vec{e} \cdot \vec{s}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS_2 \cos\beta$$

dove $\vec{e} \cdot \vec{s} = |\vec{e}| \cdot |\vec{s}| \cos\beta = \cos\beta$

ricordando che $dS_1 = dS_2 \cos\beta$, si evince: $d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS_1 = d\Phi_1$

OSSERVAZIONI

Si noti che il flusso, finito l'angolo solido $d\Omega$, non dipende né dalle distanze né dall'orientamento delle superfici elementari, sono conseguenze di due circostanze, l'una di natura fisica, l'altra matematica:

1) Il campo di Coulomb va come $1/r^2$ e le superfici sferiche come r^2 . Il flusso che passa il prodotto

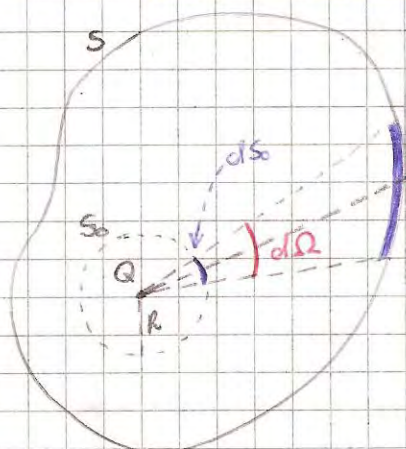
del campo per le superficie risulta indipendente da z .

2) Nella definizione di flusso vi è un prodotto scalare, cioè una proiezione. Questo fa sì che quando la superficie si inclina, aumenta sì l'angolo, ma la sua proiezione è sempre la stessa.

Con queste premesse possiamo ora affrontare il problema fondamentale del calcolo del flusso del campo elettrostatico, generato da una carica puntiforme Q , attraverso una qualunque superficie chiusa S , orientata verso l'esterno.

Dimostrazione

Caso I. CARICA INTERNA ALLA SUPERFICIE S

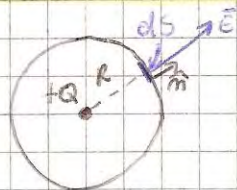


Sia Q una carica puntiforme interna ad una superficie S chiusa e orientata verso l'esterno. Sia, inoltre, S_0 una superficie sferica di raggio R , centrata sulla carica e contenuta in S . Consideriamo l'angolo solido elementare $d\Omega$ uscente dalla carica Q .

Per quanto detto precedentemente, il flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie elementare dS è uguale a quello attraverso la superficie elementare dS_0 individuata dall'angolo solido $d\Omega$ in S_0 .

Inoltre, poiché la regione interna alla superficie S può essere vista come una "pencil" costituita da infiniti angoli solidi uscenti da Q , il flusso del campo elettrostatico generato dalla carica Q attraverso la superficie S è uguale a quello attraverso la superficie sferica S_0 .

Nota: FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R



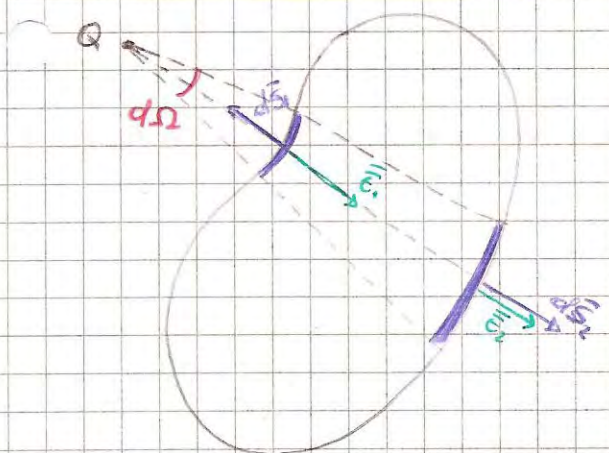
La superficie sferica è orientata verso l'esterno, nel verso di \hat{n} .

$$\Phi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS$$

$$\Phi_E(S) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{poiché } \begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{n} \\ \oint_S dS = 4\pi R^2 \text{ (area sfera)} \end{cases}$$

Caso II. CARICA ESTERNA ALLA SUPERFICIE S



Consideriamo un angolo solido elementare $d\Omega$ uscente dalla carica Q . Si vede subito che i flussi attraverso le superfici elementari dS_1 e dS_2 (orientate verso l'esterno) sono uguali ed opposti, quindi la loro somma è zero. Pertanto

$$\Phi_E(S) = 0$$

TEOREMA DI GAUSS (FORMA DIFFERENZIALE)

Consideriamo una distribuzione volumica di carica descritta dalla densità $\rho = \frac{Q}{V}$.

Fissata una qualunque superficie chiusa S , orientata verso l'esterno, che delimita un certo volume τ , il teorema di Gauss si scrive:

$$\boxed{\Phi_E(S) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}} \begin{cases} \longrightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho dV & \text{integrale di volume sulla} \\ \longrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} & \text{definizione di flusso} \end{cases}$$

Si le quindi:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

applicheremo al 1° membro il th. della divergenza
per il teorema:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad \text{da cui, sostituendo risulta:}$$

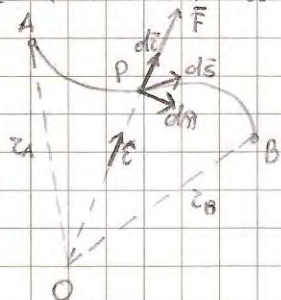
$$\int_V \text{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

dato l'arbitrarietà della superficie S , questo teorema
implica che per integrali sono uguali, quindi:

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

CONSERVATIVITA' DEL CAMPO \vec{E} (GEOMETRIA)

Un campo di forze \vec{F} su due centri, di centro O , su un ogni punto P della sfera
le la direzione delle raggio OP e modulo dipendente solo delle distanze r di P da O



$$\vec{F} = m \Phi(r) \hat{e}$$

$$\vec{\Phi} = \Phi(r) \hat{e}$$

$$d\vec{e} \perp d\vec{r}$$

$$dL_{AB} = \vec{F} \cdot d\vec{S} = m \Phi(r) \hat{e} \cdot d\vec{S} \quad d\vec{S} = d\vec{e} + d\vec{r}$$

$$dL_{AB} = m \Phi(r) \hat{e} \cdot (d\vec{e} + d\vec{r}) = m \Phi(r) \hat{e} \cdot d\vec{e} = m \Phi(r) dr$$

$$L_{AB} = m \int_{r_A}^{r_B} \Phi(r) dr$$

Quindi il lavoro compiuto dal campo \vec{F} su m non dipende dal percorso ma
dei moduli delle distanze r_A e r_B . Questo per definizione significa che il campo
 \vec{F} è conservativo, ma poiché le distanze r_A e r_B sono distanze calcolate rispetto
ad uno stesso origine O allora tali distanze si dicono radiali e
infatti \vec{F} è stato supposto essere un campo centrale (o radiale) pertanto:
ogni campo centrale è conservativo

CONSERVATIVITA' DEL CAMPO \vec{E} (FORMA INTEGRALE)

Poiché il campo \vec{E} è un campo centrale, allora sappiamo che \vec{E} è conservativo.

Pertanto, una qualunque distribuzione di cariche, può essere vista come l'insieme
(finito o infinito) di cariche. Il cui campo prodotto da ognuna è conservativo.

Quindi, in virtù delle sovrapposizione degli effetti, il campo prodotto dalle
interne distribuzioni di cariche è anch'esse conservativo.

Perciò, indicata con L una qualunque linea chiusa, la "circolazione" del campo
lungo di esse risulta essere nulla

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Questo significa che il lavoro compiuto dal campo \vec{E} su una carica q lungo
una linea chiusa è nullo.

CONSERVATIVITA' DEL CAMPO \vec{E} (FORMA DIFFERENZIALE)

Per la conservatività del campo \vec{E} in forme integrali sappiamo che: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$.

Applicando al primo membro il teorema della circolazione si avrà che:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

dove S è una qualunque superficie che si appoggia alle linee L . Poiché S è
arbitraria si avrà che in ogni punto

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = 0}$$

TEOREMA DI COULOMB

ENUNCIATO: Il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un punto P di una superficie di un conduttore è

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

dove σ è la densità superficiale di carica in P e \vec{n} è il vettore delle normali uscenti dal conduttore nel punto P (perpendicolare al piano tangente in P)

PREMESSA: DISTRIBUZIONE DELLA CARICA SU UN CONDUTTORE ISOLATO

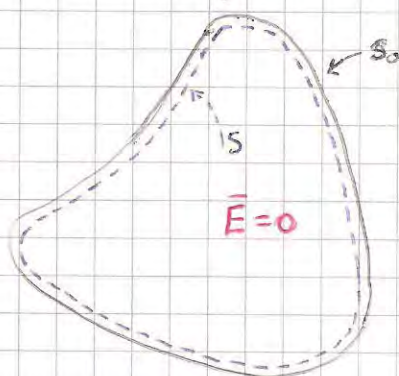
Supponiamo di avere un conduttore avente un certo volume V e una certa superficie S_0 . Supponiamo di poter immergere all'interno del conduttore (inizialmente neutro) una carica puntiforme Q . Supponiamo che la carica Q venga immersa all'interno del conduttore con un processo graduale, quindi ritenute infinite particelle microscopiche con cariche elementari dq , tutte dello stesso segno. Dopo un certo tempo, il sistema raggiunge una configurazione di equilibrio: poniamo immaginiamo che nel volume elementare dV intorno ad ogni punto P del conduttore vi sia una particella con carica dq ferma in quel punto (equilibrio elettrostatico).

Poiché $\vec{F} = dq \vec{E}$ se dq è ferma $\vec{F} = m \vec{a} = 0$, quindi $\vec{E} = 0$ in ogni punto del conduttore.

Consideriamo, ora, una superficie S , interna al conduttore ed estremamente vicina alle superficie del conduttore stesso. Applichiamo a questa superficie il teorema di Gauss.

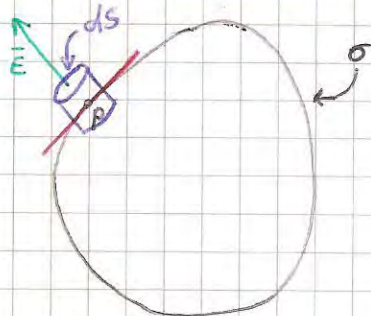
Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S è nullo, poiché in tutti i punti di S , punti che sono interni al conduttore, il campo elettrico è nullo, pertanto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



Per cui $Q_{int} = 0$. Allora, la carica Q che somministravamo al conduttore non si trova all'interno delle superficie S . È dunque non può che trovarsi sulle superficie del conduttore, distribuita con una densità superficiale σ che in generale, varia da punto a punto della superficie del conduttore.

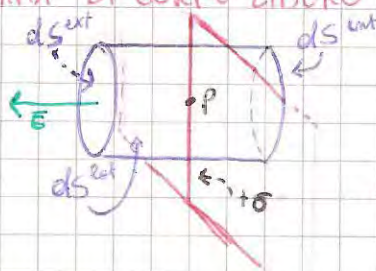
Dimostrazione:



Per quanto detto prima consideriamo la superficie S con densità superficiale σ . Enunciamo il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un punto P della superficie del conduttore.

Se σ è positiva il campo \vec{E} sarà uscente e diretto secondo le normali al piano tangente alla superficie nel punto P. Dovremo quindi calcolare il modulo di \vec{E} . Applichiamo il th. di Gauss ad un cilindrico elementare di base dS e altezza infinitesima.

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



$$\Phi_E(S) = \int_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{int}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

dove $\int_{S_{int}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ perché internamente alle superficie S non ci sono cariche.

$\int_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ perché lateralmente $d\vec{S}$ è perpendicolare ad \vec{E}

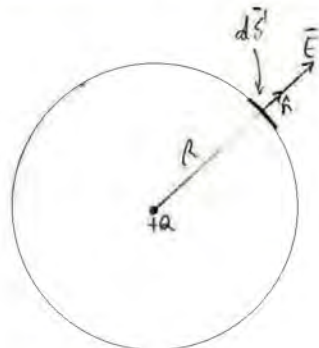
Quindi il flusso $\Phi_E(S)$ vale:

$$\Phi_E(S) = \int_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \quad \text{ricordando che } dQ_{int} = \sigma dS \text{ in ke}$$

$$E dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

CALCOLO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA ALCUNE CONFIGURAZIONI (DISTRIBUZIONI CONTINUE) DI CARICA UTILI
UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS

FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA +Q ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R ,
ORIENTATA VERSO L'ESTERNO, CENTRATA SULLA CARICA



$$\Phi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \oint_S d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi R^2$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \quad \Phi_E(S) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \boxed{\frac{Q}{\epsilon_0}}$$

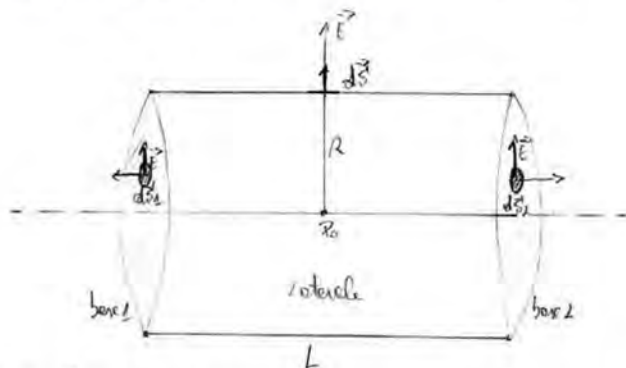
Nei problemi:

$$E = \begin{cases} 0, & r < R, \text{ interno delle sfere} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R, \text{ esterno delle sfere} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno delle sfere il campo si calcola come se le cariche Q fossero tutte concentrate nel centro.

Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo infinito, uniformemente carico:

$S \rightarrow$ superficie cilindrica escludere di raggio R e lunghezza L



$$\Phi_E(S) = \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{laterale}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

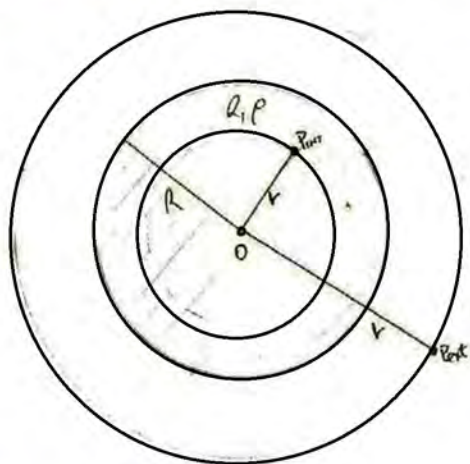
$$\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left[\text{i vettori } \vec{E} \text{ e } d\vec{S} \text{ sono perpendicolari per ogni superficie } d\vec{S}, \text{ quindi il loro prodotto scalare } \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ } \rightarrow 0 \right]$$

$$\Phi_E(S) = \int_{\text{laterale}} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \vec{E} \text{ uniforme} \Rightarrow \Phi_E(S) = \vec{E} \cdot \int_{\text{laterale}} d\vec{S} = E \cdot 2\pi R \cdot L$$

$$\Phi_E(S) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad Q_{\text{int}} = \lambda \cdot L \Rightarrow \Phi_E(S) = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \varphi_E(s) = E \cdot \pi R L \\ \varphi_E(s) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E \cdot \pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 R}$$

camp. elettrostatico di una carica uniformemente distribuita in una sfera



I° caso - $r < R$ (interno sfera)

$$\varphi_E(s) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \quad \varphi_E(s) = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \quad \begin{cases} \varphi_E(s) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \\ \varphi_E(s) = E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} r \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} r \right.$$

II° caso - $r > R$ (esterno sfera)

$$\varphi_E(s) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \quad \varphi_E(s) = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \quad \begin{cases} \varphi_E(s) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \\ \varphi_E(s) = E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} \quad \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \cdot \frac{R^3}{r^2} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right.$$

Riepilando:

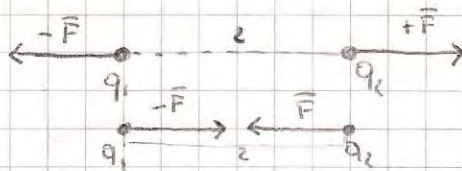
$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \cdot \frac{r}{R^3}, & r < R, \text{ interno della sfera} \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, & r > R, \text{ esterno della sfera} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno della sfera il camp. è computato come se la carica fosse tutta concentrata nel centro. 76

LEGGE DI COULOMB

FORMA SCALARE

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$



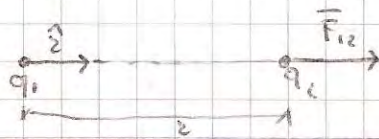
cariche con lo stesso segno

cariche di segno opposto

ϵ_0 = costante dielettrica nel vuoto

FORMA VETTORIALE

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$



VALORI NUMERICI

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME

Le forze che una carica sorgente Q esercita su una carica sonda q posta in un punto dello spazio P a distanza r da Q è:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad \text{il rapporto } \frac{\vec{F}}{q} \text{ è detto campo elettrostatico quindi}$$

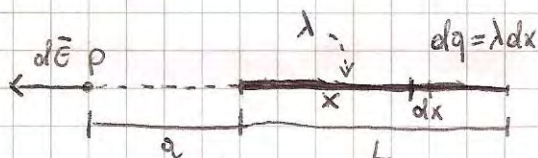
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] \quad F_{el} = q \cdot \vec{E}$$

TEOREMA DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

In un sistema di N cariche puntiformi il campo elettrostatico generato dal sistema di cariche in un punto P generico è pari alla somma dei campi prodotti in P da ciascuna delle N cariche, quando osservano una per volta.

ESEMPI DI CAMPI ELETTROSTATICI

CAMPO DI UN FILO UNIFORMEMENTE CARICO IN UN PUNTO P ALLINEATO AL FILO MA ESTERNO AD ESSO



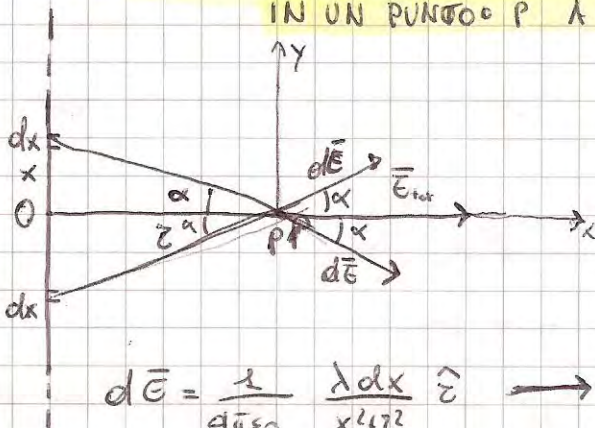
$dq = \lambda dx$ poiché la densità è uniformemente distribuita si ha: $\lambda = \frac{Q}{L}$, quindi:

$$dq = \frac{Q}{L} dx$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(x+a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{dx}{(x+a)^2} \rightarrow \text{campo infinitesimo}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \int_0^L \frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left[-\frac{1}{x+a} \right]_0^L \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left[-\frac{1}{L+a} + \frac{1}{a} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a(L+a)} \end{aligned}$$

CAMPO ELETTROSTATICO, GENERATO DA UN FILO RETTILINEO INDEFINITO UNIFORM. CARICO, IN UN PUNTO P A DISTANZA z DAL FILO

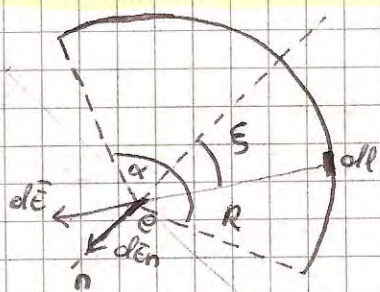


Non manca che dx ne spalti le componenti lungo l'asse y che dE si annullano perché uguali ed opposte alle componenti lungo l'asse x che dx che stanno al di sotto del filo O . Il campo totale è dato dunque dalla somma delle componenti delle dE lungo l'asse x .

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2+z^2} \hat{r} \rightarrow dE_x = dE \cos \alpha \quad \text{dove} \quad \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$E_{\text{tot}} = \int_0^{\infty} dE_x dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda z \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN FILO UNIFORMEMENTE CARICO, A FORMA DI ARCO DI CIRCONFERENZA, NEL SUO CENTRO.



$$dq = \lambda dl, \quad dl = R d\varphi \rightarrow \text{def. equivalente}$$

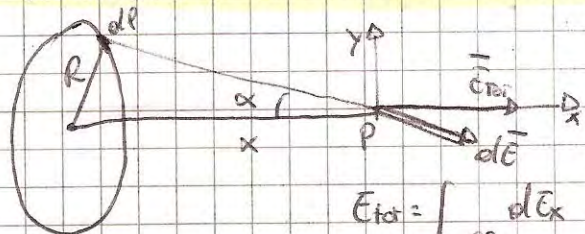
$$dq = \lambda R d\varphi$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} d\varphi \rightarrow \text{campo elementare}$$

$$dE_n = dE \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos \varphi d\varphi \rightarrow \text{campo elementare lungo n}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \text{campo totale}$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN ANELLO UNIFORMEMENTE CARICO NEI PUNTI DEL SUO ASSE

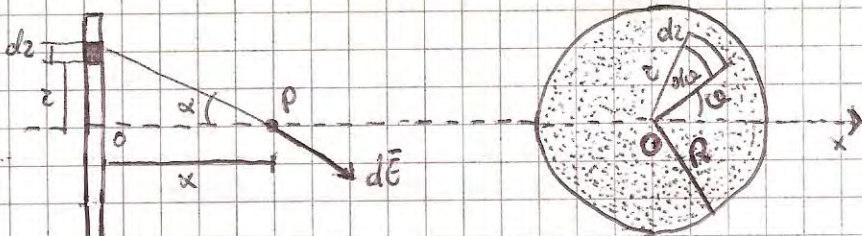


$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dq}{x^2 + R^2} \rightarrow \text{campo elementare}$$

$$dE_x = dE \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$E_{\text{tot}} = \int_{\text{anello}} dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} (2\pi R) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{Rx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN DISCO UNIFORMEMENTE CARICO NEI PUNTI DEL SUO ASSE



$$\text{densità superficiale } \sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\text{elemento di area } dS = 2\pi r dr$$

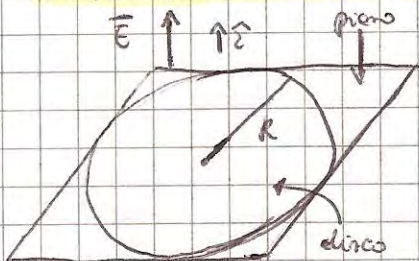
$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x^2 + r^2} \rightarrow \text{campo elementare}$$

$$dE_x = dE \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \rightarrow \text{campo elementare lungo l'asse x}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN PIANO INDEFINITO, UNIFORMEMENTE CARICO

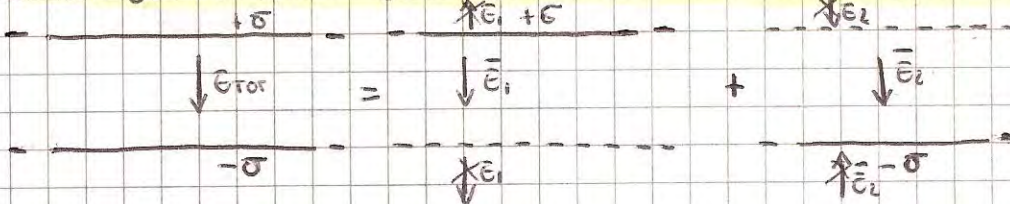


Possiamo considerare il piano come un disco di raggio infinito

$$E = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

La direzione di \vec{E} è \perp al piano

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA DUE PIANI CARICHI UNIFORMEMENTE, INDEFINITI E PARALLELI



$$E_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

CAMPO ELETTROSTATICO NELLE SFERE

CAMPO ELETTROSTATICO DI UNA CARICA Q UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE SFERICA

Del tl. di Gauss abbiamo:

$$\Phi_s(s) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \longrightarrow E 4\pi z^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

poiché le cariche q sono distribuite sulle superfici delle sfere, le $Q_{int} = 0$ quando il campo $E = 0$ all'interno delle sfere

$$E = 0 \quad \text{per } 0 \leq z < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad \text{per } z > R$$

CAMPO ELETTROSTATICO DI UNA CARICA Q UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA IN UNA SFERA

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \longrightarrow \text{densità volumica} \quad \rho = \frac{Q}{V} \quad \text{dove } V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

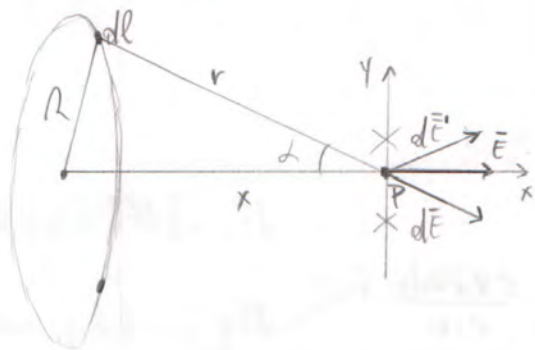
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} z^2 \quad \text{per } 0 \leq z < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad \text{per } z > R$$

CAMPI ELETTROSTATICI DI ALCUNE DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

7

① Campo elettrostatico generato da un anello uniformemente carico nei punti del suo asse:



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

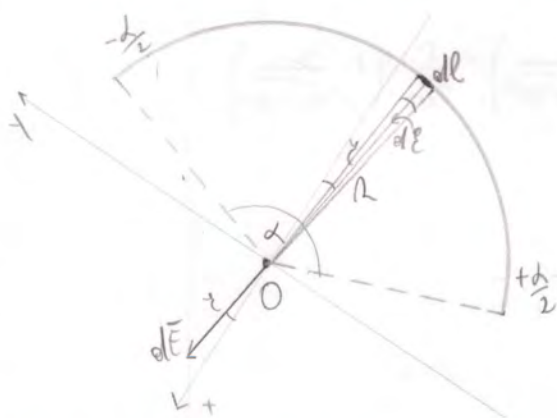
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dl$$

$$|\vec{E}_{tot}| = \int d\vec{E}_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Rx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

(lunghezza anello)

② Campo elettrostatico generato da un filo uniformemente carico, e forme d'arco di circonferenza, nel suo centro:



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad dl = R \cdot d\alpha \quad dq = \lambda R \cdot d\alpha$$

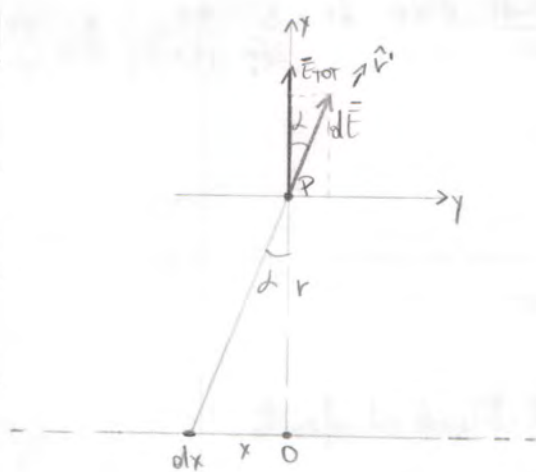
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\alpha}{R^2} \cdot \hat{r}$$

$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$$d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\alpha}{R} \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$$|\vec{E}_{tot}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R}{R} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot 2 \sin(\alpha/2)$$

③ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico:



$$\lambda = \frac{dq}{dx} \quad dq = \lambda dx \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$$d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx$$

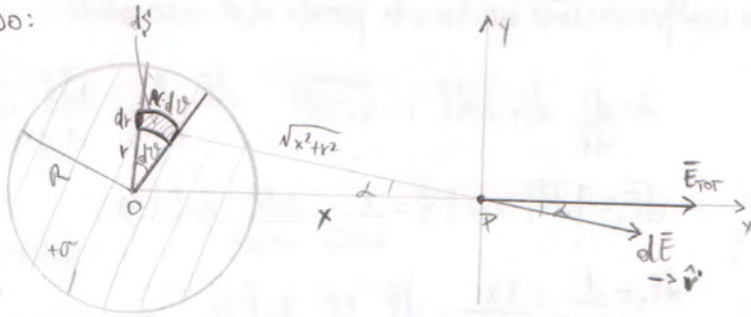
$$\Rightarrow E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(r^2 \tan^2(\alpha) + r^2)^{3/2}} \cdot r \cdot \sec^2(\alpha) d\alpha$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3(\alpha)} d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

4) Campo elettrostatico prodotto da un disco uniformemente carico, nei punti del suo asse:

I° METODO:



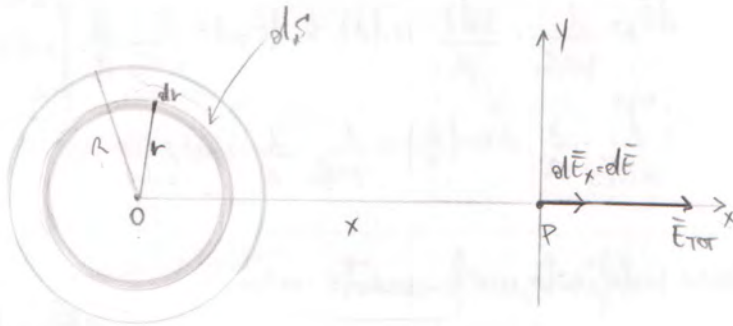
$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad dP = \sigma \cdot dS \quad dS = r \cdot d\theta \cdot dr \quad dP = \sigma r \cdot d\theta \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \hat{r}'$$

$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$
 $d\vec{E}_y$ (si elide per simmetria)

$$|d\vec{E}_x| = dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr \cdot x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$|\vec{E}_{\text{tot}}| = E_{\text{tot}} = \int_{\text{disco}} dE_x = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

II° METODO:

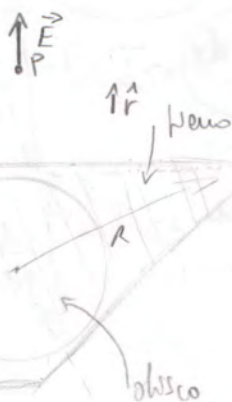


$$\sigma = \frac{dP}{dS} \quad dP = \sigma \cdot dS \quad dS = 2\pi r \cdot dr \quad dS \Rightarrow \text{elemento differenziale} \quad \lambda = \frac{dP}{dl} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{2\pi r} = \sigma \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \int d\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

5) Campo elettrostatico prodotto da un piano indefinito, uniformemente carico:

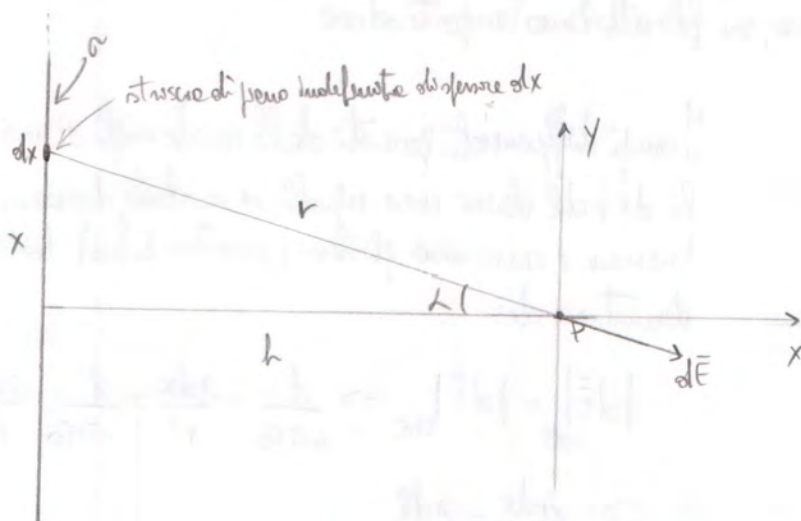
I° METODO:



Piano \rightarrow disco di raggio R che tende ad infinito

$$E = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

con direzione perpendicolare al piano



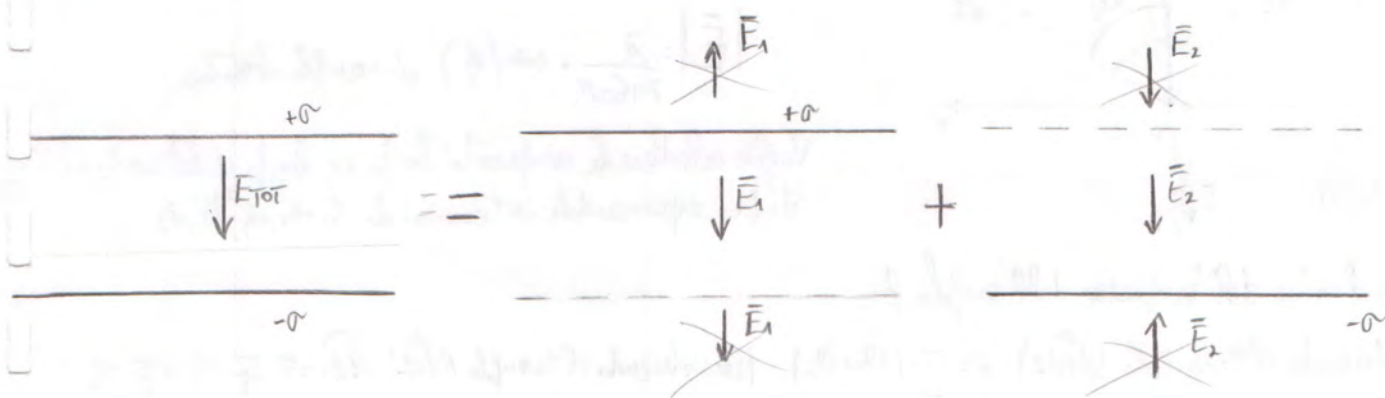
La striscia di pino può essere considerata ed un filo rettilineo indefinito con: $d\lambda = \sigma dx$.

$$\vec{E} = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \hat{r} \quad \begin{cases} d\vec{E}_x = |\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} \\ d\vec{E}_y = |\vec{E}| \cdot \sin(\alpha) \cdot \hat{y} \end{cases} \quad \begin{aligned} |\vec{E}_x| = dE_x &= \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \cos(\alpha) \\ x &= h \cdot \tan(\alpha) \\ dx &= h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ h &= r \cos(\alpha) \Rightarrow r = \frac{h}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

$$d\lambda = \sigma dx = \sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad dE_x = \frac{\sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{h}{\cos(\alpha)}} \cdot \cos(\alpha) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} d\alpha$$

$$\vec{E}_{\text{Tot}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dE_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \pi = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Camp elettrostatico prodotto da due pini carichi uniformemente, indefiniti e paralleli:



$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad |\vec{E}_{\text{Tot}}| = 2 \cdot |\vec{E}_1| = 2 \cdot |\vec{E}_2| = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{all'esterno dei pini i due campi sono uguali} \\ \text{ed opposti, si elidono.} \end{array} \right)$$

Il camp è presente solo tra i due pini ed ha modulo pari a $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, direzione perpendicolare ai pini, e verso da quello carico positivamente ($+\sigma$) a quello carico negativamente ($-\sigma$)

• Determinazione delle componenti λ_{inf} x del camp:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_2)]$$

Formule di prosteferi:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\rho + \vartheta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\rho - \vartheta}{2}\right) = \sin(\rho) - \sin(\vartheta), \text{ per cui:}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2)$$

• Determinazione delle componenti λ_{inf} y del camp:

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

Formule di prosteferi:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\rho + \vartheta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\rho - \vartheta}{2}\right) = \cos(\rho) + \cos(\vartheta), \text{ per cui:}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

N.B.: Le componenti λ_{inf} l'asse x può essere scritta come:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_2)]$$

per il triangolo Δ di L vola: $R = d_1 \cdot \sin(\vartheta_1)$ e $R = d_2 \cdot \sin(\vartheta_2)$

per cui: $\sin(\vartheta_1) = \frac{R}{d_1}$ e $\sin(\vartheta_2) = \frac{R}{d_2}$

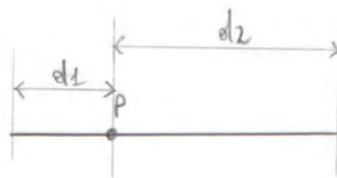
per cui:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \left[\frac{R}{d_1} - \frac{R}{d_2} \right] = \boxed{-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$$

Resultante: $\vec{E} = \begin{cases} |\vec{E}_x| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ |\vec{E}_y| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) \end{cases}$

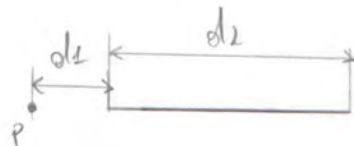
• Caso limite

- P si trova sul filo $\begin{cases} R = \phi \\ \vartheta_1, \vartheta_2 = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \infty \end{cases}$



- P si trova sulla retta del filo, ma esternamente ad esso

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \phi \end{cases}$$



POTENZIALE ELETTROSTATICO

Il lavoro compiuto dalla forza del campo elettrostatico per portare una carica puntiforme q dal punto A al punto B, qualunque ne le linee L che unisce A e B è:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{l} = -q (V_B - V_A) \rightarrow L_{AB} = q (V_A - V_B)$$

dove: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$;
 $\vec{E} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla} V \rightarrow$ queste espressioni esprimono le caratteristiche del campo elettrico irrotazionale:

$\text{rot } \vec{E} = 0 \rightarrow$ conservatività in forma locale
 $\vec{E} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla} V \rightarrow$ conservatività al livello discusso

Nota

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ è una relazione importante perché ci permette di pensare che un campo vettoriale come \vec{E} ed un campo scalare rappresentato dal prodotto di V dove V è una funzione potenziale.

Un particolare V è detto potenziale elettrostatico.

Da risultati ottenuti in precedenza sappiamo che la differenza di potenziale è:

$$\Delta V = -\frac{L_{AB}}{q} \quad \text{poiché il lavoro è il prodotto scalare di una forza per uno spostamento, cioè } dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q}$$

quindi

$$\Delta V = -\frac{L_{AB}}{q} = -\frac{1}{q} \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \frac{\vec{F}_{el}}{q} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Supponendo che da voler calcolare il potenziale in A rispetto a B posto a distanza infinita da A allora il potenziale in B sarà appunto nullo, mentre quello in A sarà:

$$V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_B \quad \text{dove } V_B \stackrel{\text{inf}}{=} 0$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO DI UNA CARICA PUNIFORME

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z} \rightarrow \text{potenziali integrali}$$

Note: z è la distanza delle cariche rispetto al punto in cui è calcolato il potenziale.

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{z} \rightarrow \text{potenziali infinitesimali}$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA Q UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE SFERICA

$$\int V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad \text{per } 0 \leq z \leq R$$

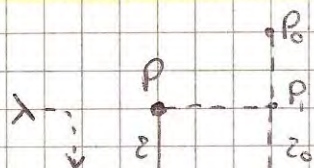
$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z} \quad \text{per } z > R$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA Q UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA IN UNA SFERA

$$V_p = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(3 - \frac{z^2}{R^2} \right) \quad \text{per } 0 \leq z \leq R$$

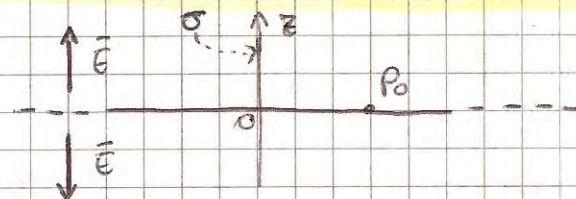
$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z} \quad \text{per } z \geq R$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UN FILO RETTILINEO, INDEFINITO, UNIFORMEMENTE CARICO



$$V_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

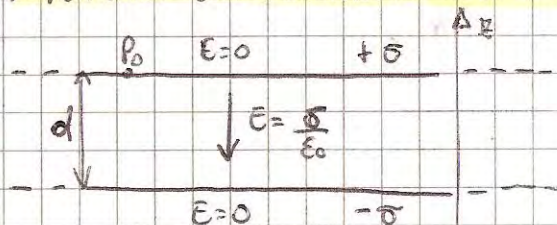
POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UN PIANO INDEFINITO UNIFORMEMENTE CARICO



$$V_{P_0} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \quad z < 0 \\ V_P = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \quad z > 0 \end{array} \right.$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA DUE PIANI INDEFINITI E PARALLELI, CARICHI CON

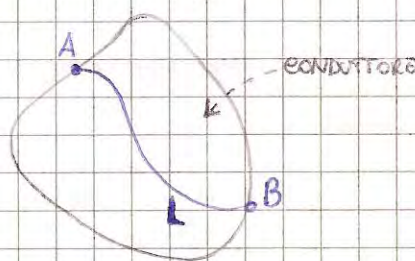
$+\sigma \text{ e } -\sigma$



$$\left\{ \begin{array}{l} V_P = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad \text{per } z < 0 \\ V_P = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - z) \quad \text{per } 0 \leq z \leq d \\ V_P = 0 \quad \text{per } z > d \end{array} \right.$$

LA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE È EQUIPOTENZIALE

Consideriamo due punti A e B sulle superficie di un conduttore o interne ed esso e una linea L, interne al conduttore, che lo attraversa. Le differenze dei potenziali sono:



$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Ma per la conservatività in forme integrali del campo E risulta che:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Per tanto risulta che: $V_B - V_A = 0 \Rightarrow V_B = V_A$ dunque:

I punti delle superficie di un conduttore (e quelli interni al conduttore) si trovano allo stesso potenziale.

OSSERVAZIONE: Il fatto che le superficie di un conduttore ne equipotenziali ci dice qualcosa molto importante e cioè: fornisce una spiegazione al fenomeno detto equilibrio statico. Il fatto che le cariche si concentrano sulle superficie e inoltre mantengono la loro posizione, inalterata fino a che non si presentino altri fenomeni. Il fatto che le cariche sulle superficie sono ferme, significa che le forze F agente sulle cariche q in un punto P delle superficie, non le levano. In altre parole la forza F agente sulle cariche q è perpendicolare allo spostamento $d\vec{r}$, il quale spostamento non avviene nella direzione del piano tangente al conduttore nel punto P della superficie dove è posizionata la carica considerata. Le perpendicolarità fra la forza F e lo spostamento $d\vec{r}$ è dimostrabile considerando il th. di Coulomb, il quale esprime che la direzione del campo elettrostatico nelle immediate vicinanze del punto P, quando la forza agente sulle cariche q, è ortogonale al piano tangente al conduttore in P.

EQUAZIONE DI POISSON

Si chiede di una relazione locale, che collega il potenziale elettrostatico in un punto con la densità di cariche volumiche esistente in quel punto.

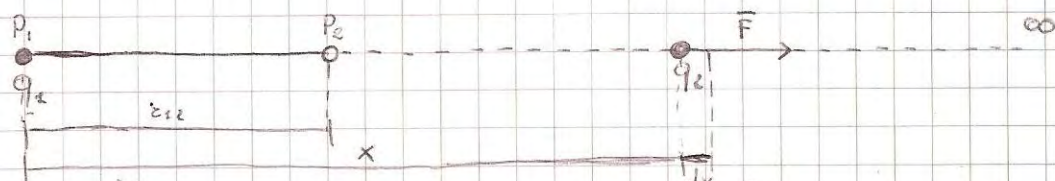
$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{TH. GAUSS DIFF.}$$

$$\vec{E} = - \text{grad } V \rightarrow \text{CONSERVATIVITA' DI } \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{div}(-\text{grad } V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ENERGIA ELETTROSTATICA (SISTEMA DI DUE CARICHE)

Definiamo energia elettrostatica di un sistema di due cariche puntiformi: q_1 e q_2 , poste a distanza z_{12} , il lavoro che bisogna compiere contro le forze del campo elettrostatico per portare una delle cariche dall'infinito alla distanza z_{12} dell'altra.



$$U \equiv -L_{\infty P_2} = - \int_{\infty}^{z_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{x^2} dx = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left[-\frac{1}{x} \right]_{\infty}^{z_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{z_{12}}$$

ENERGIA ELETTROSTATICA (SISTEMA DI N CARICHE)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{z_{ij}}$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ serve per tener conto del fatto che le sommatorie \sum compaiono due volte per ogni coppia di cariche che vanno considerate una sola volta.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{z_{ij}} \right)$$

dove il termine fra parentesi indica il potenziale elettrostatico generato da tutte le cariche puntiformi eccetto la i -esima, nel punto dove è posizionata la carica i -esima, quindi:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

DENSITA' DI ENERGIA POTENZIALE

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Condensatore: è un sistema di due conduttori tra i quali esiste una differenza di potenziale elettrostatica completa. I due conduttori sono detti armature del condensatore.

Induzione elettrostatica completa: significa che la carica presente su un'armatura del condensatore è uguale ed opposta alla carica presente sull'altra armatura.

Capacità di un condensatore: si definisce capacità di un condensatore il rapporto fra la carica dell'una o dell'altra armatura e la differenza di potenziale tra le armature.

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} \longrightarrow \text{dipende dalle geometrie del condensatore e dell'eventuale dielettrico in esso contenuto}$$

Energia elettrostatica di un condensatore

Poiché l'energia elettrostatica U coincide con il lavoro svolto per spostare una carica da una platea all'altra (ovvero da un'armatura all'altra) otteniamo che l'energia elettrostatica per un condensatore è:

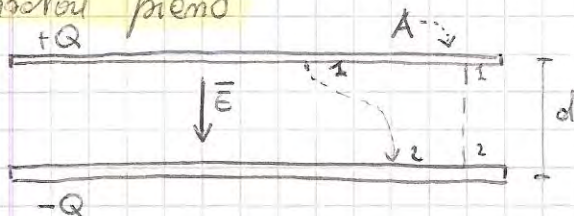
$$dL = dq V \longrightarrow \text{lavoro infinitesimo di } -q \text{ a } +$$

$$C = \frac{q}{V} \longrightarrow \text{capacità di un condensatore}$$

$$dL = dq \frac{q}{C} \Rightarrow L = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2C} Q^2 = U$$

$$U = \frac{1}{2C} Q^2 \iff U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \iff U = \frac{1}{2} Q |\Delta V|$$

Condensatore piano



Ipotesi: 1) Campo elettrico uniforme all'interno
2) Effetti di bordo trascurabili.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \longrightarrow \text{densità superficiale}$$

$$\text{Il campo } \vec{E} \text{ vale } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \longrightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$|\Delta V| = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d \longrightarrow \frac{Q}{|\Delta V|} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \longrightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

L'energia elettrostatica vale $U = \frac{1}{2C} Q^2$

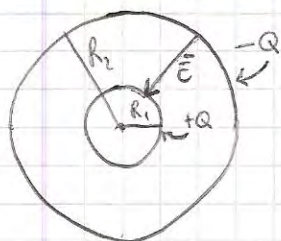
Forza di interazione fra le due armature

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \longrightarrow \text{procedo a carica costante}$$

$$F = \frac{\epsilon_0 A \Delta V^2}{2x^2} \longrightarrow \text{procedo a differenza di potenziale costante}$$

dove x è la distanza delle due armature prima dello spostamento dx (positivo o negativo) di una delle due armature

Condensatore sferico



Il campo elettrico del sistema vale

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 & \text{per } 0 \leq r < r_1 \\ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{per } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \vec{E} = 0 & \text{per } r > r_2 \end{cases}$$

la differenza di potenziale vol:

$$|\Delta V| = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

la capacità vol:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

NOTA

se $R_2 = R_1 + d$ con $d \ll R_1$

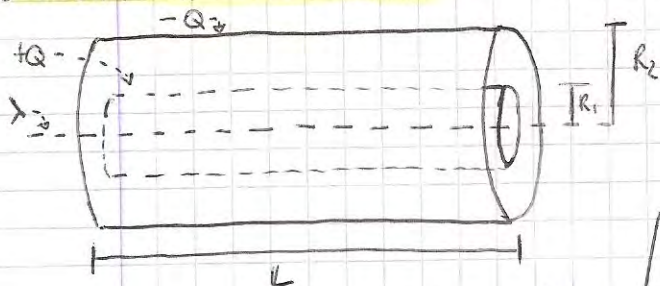
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 (R_1 + d)}{d} \approx \epsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{d} \Rightarrow C \approx \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

dove $4\pi R_1^2$ è una superficie di raggio R_1

l'energia elettrostatica vol:

$$U = \frac{1}{2C} Q^2$$

Condensatore cilindrico



Ipotesi:

1) Trascurare gli effetti di bordo

Il campo elettrostatico vol:

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 & \text{per } 0 \leq r < R_1 \\ \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{1}{r} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \vec{E} = 0 & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

densità lineare lungo l'asse del cilindro

$$\lambda = Q/L$$

la differenza di potenziale vol:

$$|\Delta V| = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

la capacità vol:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{4\pi\epsilon_0 L}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

NOTA

se $R_2 = R_1 + d$ con $d \ll R_1$

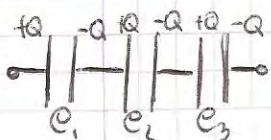
$$C \approx \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{con } A = 2\pi R_1 L \text{ superficie del cilindro di raggio } R_1$$

l'energia elettrostatica vol:

$$U = \frac{1}{2C} Q^2$$

Collegamento dei condensatori

Collegamento in serie: N condensatori si dicono collegati in serie se le estremità delle armature di ciascuno di essi sono le stesse ma di segno opposto



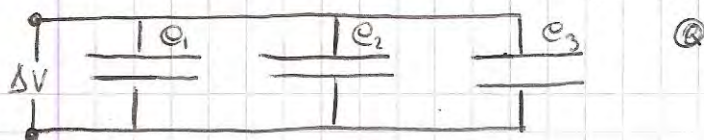
$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad \Delta V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

$$U = \frac{1}{2C_1} Q^2 + \frac{1}{2C_2} Q^2 + \frac{1}{2C_3} Q^2 = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{Q^2}{2C_{eq}}$$

quindi in generale

$$C_{eq} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

Collegamento in parallelo: N condensatori si dicono collegati in parallelo se ai loro capi risulta la stessa differenza di potenziale.



$$Q_1 = C_1 \Delta V, \quad Q_2 = C_2 \Delta V, \quad Q_3 = C_3 \Delta V$$

$$U = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\Delta V)^2 + \frac{1}{2} C_3 (\Delta V)^2 = \frac{(\Delta V)^2}{2} (C_1 + C_2 + C_3) = \frac{(\Delta V)^2}{2} C_{eq}$$

quindi in generale:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N$$

Corrente

Intensità di corrente: Consideriamo un filo conduttore, di sezione S , attraversato da cariche in moto. Si definisce intensità di corrente I , le cariche dQ che attraversano la sezione S del conduttore nel tempo dt .

$$I = \frac{dQ}{dt} = [A] = \left[\frac{C}{s} \right]$$

Corrente stazionaria: corrente che non dipende dal tempo

Velocità delle cariche: per avere corrente c'è bisogno che un certo numero n di cariche attraversi una superficie con una certa velocità. Quindi le cariche dQ che attraversano la sezione S di un conduttore nel tempo dt è quella contenuta nel cilindro di spazio $dl = v dt$ dove v è la velocità in modulo di una carica.

Pertanto, se n è il numero di cariche per unità di volume del conduttore che concorrono alla corrente I , le cariche dQ è:

$$dQ = n|q| S dl \quad \text{dove} \quad n|q| = N^\circ \text{ cariche}; \quad S dl = \text{unità di Volume.}$$

$$dQ = n|q| S v dt \rightarrow \frac{dQ}{dt} = I = n|q| S v \rightarrow v = \frac{I}{n|q| S}$$

Nota: Il segno positivo della corrente è dato dal segno della velocità delle cariche positive.

Densità di corrente: si definisce densità di corrente il campo vettoriale:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \rightarrow I(t) = \int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad \text{intensità di corrente come flusso del campo } \vec{J} \text{ attraverso la superficie orientata } S$$

Nota: Se la densità \vec{J} è costante su tutta la superficie S allora la corrente vale:

$$I = JS \quad \text{in forma vettoriale} \quad \vec{J} = n|q|v \Rightarrow \vec{J} = n|q|\vec{v}$$

Equazione di continuità: si tratta di una formulazione matematica del principio di conservazione delle cariche elettriche il quale afferma che in un sistema qualunque chiuso fisso, le cariche iniziali sono uguali a quelle finali. Matematicamente si ha:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{dove } \rho = \text{densità volumica di cariche}$$

Nel caso di regime stazionario delle correnti si ha che ρ è costante nel tempo, così la derivata di ρ rispetto al tempo è nulla e quindi l'equazione di continuità in caso di corrente stazionaria si esprime come: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

e questo ci indica che in condizioni stazionarie il campo \vec{J} è solenoidale.

Prime legge di Ohm

$\Delta V = RI$ \longrightarrow la differenza di potenziale è proporzionale alla corrente
 $\longrightarrow R$ è detta resistenza ed è una costante di proporzionalità $R = [\Omega] = \left[\frac{V}{A}\right]$

Seconda legge di Ohm

$R = \rho \frac{L}{S} = [\Omega]$ dove: $\longrightarrow L$ = lunghezza conduttore
 $\longrightarrow S$ = sezione conduttore
 $\longrightarrow \rho$ = resistività del conduttore (dipende dalle caratteristiche chimico-fisiche del conduttore)

Effetto Joule

Il passaggio di corrente attraverso una resistenza R provoca una dissipazione di energia, tale effetto dissipativo prende il nome di effetto Joule. L'energia dissipata viene detta potenza P vale:

POTEZZA $\longrightarrow P = \Delta V I = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \left[\frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}}\right] = [\text{Watt}]$

ENERGIA DISSIPATA NEL TEMPO $t \longrightarrow W = P \cdot t$

FORMA LOCALE DELLA LEGGE DI OHM

Consideriamo un tratto infinitesimo di filo conduttore e sezione costante ΔS sufficientemente piccola da ritenere che la densità di corrente J ne sia praticamente costante in ogni suo punto. Sia dV la differenza di potenziale applicata ai suoi capi. Il campo elettrico all'interno del conduttore è diretto dal potenziale più alto a quello più basso e vale in modulo:

$\vec{E} = \frac{dV}{dx}$ dove $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \longrightarrow$ potenziale elementare generato da una carica dq in un punto P lontano all'infinito da un altro punto.

Dalla 1^a legge di Ohm $\Delta V = RI \Rightarrow dV = R dI$, quindi:

$E = \frac{R dI}{dx}$ dove $R = \rho \frac{dx}{dS}$ per la seconda legge di Ohm

$dI = J dS$ corrente in funzione della sua densità

quindi

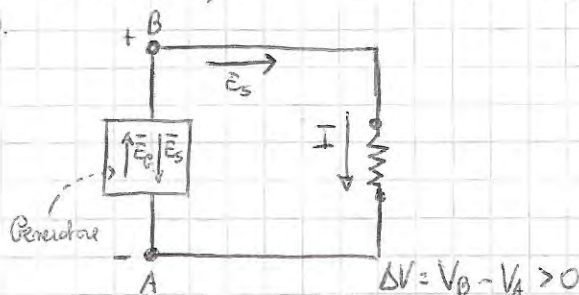
$E = \rho \frac{dx}{dx} \frac{J dS}{dx} = \rho J \Rightarrow E = \rho J \longleftarrow$ forma locale della legge di Ohm.

FORZA ELETTRIMOTRICE

La forza elettromotrice è la premotrice che caratterizza un generatore ed è definita come l'integrale del campo elettromotore \vec{E}_e valutato lungo una linea interna al generatore, dal morsetto negativo a quello positivo.

$$fem = \int_{-}^{+} \vec{E}_e \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}_e = -\vec{E}_s \Rightarrow \vec{E}_e + \vec{E}_s = \rho \vec{J}$



Nota: la definizione fa riferimento al sistema rappresentato in figura, in cui il verso della corrente va dal potenziale maggiore al potenziale minore, cioè da B ad A.

\vec{E}_e : è il campo elettromotore che viene prodotto dal generatore al fine di mantenere costante la differenza di potenziale ai due capi A e B, infatti, in un sistema in figura non c'è fonte il generatore il circuito col un certo punto in realtà "aperto" così non verrebbe alterato la differenza di potenziale.

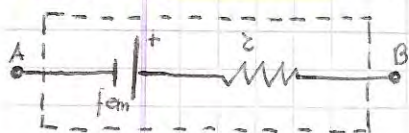
\vec{E}_s è il campo prodotto dal sistema con differenza di potenziale ΔV

GENERATORE IDEALE



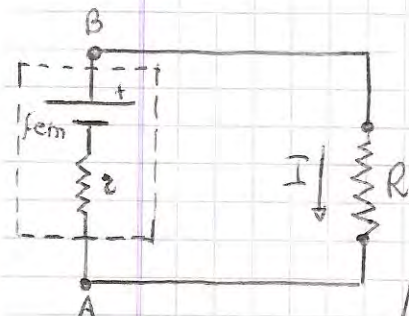
Questo tipo di generatori non è soggetto ad effetti dissipativi (effetto Joule) in quanto non presenta resistenza interna.

GENERATORE REALE



Questo tipo di generatori presenta una resistenza interna e dunque è soggetto a fenomeni di dissipazione. Le potenze dissipate dal generatore sono:

$$P_{\text{generatore}}^{\text{d}} = zI^2$$



Considerando il sistema elettrico completo possiamo fare le seguenti considerazioni:

$$P_{\text{Joule}} = RI^2 \rightarrow \text{potenza dissipata nel sistema}$$

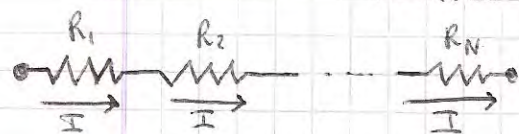
$$P_{\text{generatore}} = fem I - zI^2 \rightarrow \text{potenza erogata dal generatore}$$

Per la conservazione dell'energia risulta:

$$RI^2 = fem I - zI^2 \rightarrow I = \frac{fem}{R+z} \rightarrow \Delta V = RI \rightarrow \Delta V = fem \frac{z}{1+\frac{z}{R}}$$

Conclusione: la differenza di potenziale ai capi di un generatore reale dipende dalle resistenze R del circuito (detto anche Ohmico).

Resistenze in serie: N resistenze R_1, R_2, \dots, R_N sono collegate in serie e sono attraversate dalla stessa corrente I.



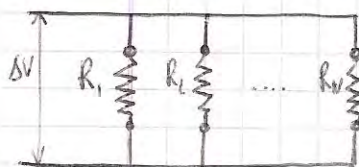
$$\Delta V_1 = R_1 I, \Delta V_2 = R_2 I, \dots, \Delta V_N = R_N I$$

La potenza dissipata per effetto Joule è:

$$P = R_1 I^2 + R_2 I^2 + \dots + R_N I^2 = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) I^2$$

quindi $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$

Resistenze in parallelo: N resistenze R_1, R_2, \dots, R_N sono collegate in parallelo e ci sono capi comuni e la stessa differenza di potenziale.



$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1}, I_2 = \frac{\Delta V}{R_2}, \dots, I_N = \frac{\Delta V}{R_N}$$

La potenza dissipata per effetto Joule è:

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R_1} + \frac{(\Delta V)^2}{R_2} + \dots + \frac{(\Delta V)^2}{R_N} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) (\Delta V)^2$$

$$\text{quindi } \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

PRIMO PRINCIPIO DI KIRCHHOFF (o principio dei nodi)

In condizioni stazionarie, la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla. Equivalentemente, la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti.

Dim

Considerando l'equazione di continuità $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$ in condizioni stazionarie in cui $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, dove \vec{J} è il campo densità di corrente.

Poiché $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, il campo \vec{J} è solenoidale, quindi $\oint_V \nabla \cdot \vec{J} dV = 0$ dove:

V è il volume delimitato dalla superficie chiusa S scelta arbitrariamente purché in modo che al suo interno ci sia un solo nodo. Per il th. della divergenza si avrà:

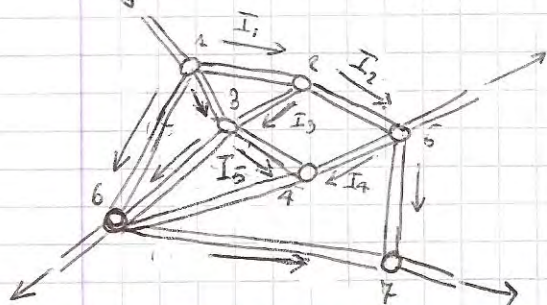
$\oint_V \nabla \cdot \vec{J} dV = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$. Le densità di corrente dunque risulta nulla in tutto la superficie S ma diversa da zero nei punti in cui confluiscono i nodi, pertanto il secondo integrale diventa:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_3} \vec{J}_3 \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{dove } \Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3 \text{ sono le regioni dei fili costituenti i rami del nodo.}$$

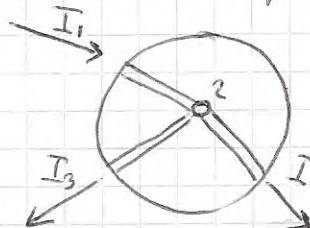
Questi tre integrali forniscono le correnti che attraversano i rami e così:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3$$

Nota: Per modo di intendere un punto in cui confluiscono almeno tre rami di un circuito. Una parte chiusa del circuito prende il nome di maglia.



Nodo considerato per le dimostrazioni



SECONDO PRINCIPIO DI KIRCHHOFF (o principio delle maglie)

In condizioni stazionarie, in una maglia la somma algebrica delle forze elettromotrici è uguale alla somma algebrica delle cadute di tensione ai capi dei conduttori.

PROCESSO DI SCARICA DI UN CONDENSATORE

Le differenze di potenziali ai capi del condensatore, le correnti che fluiscono nel circuito e le cariche sulle armature del condensatore dipendono dal tempo secondo la relazione:

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad q(t) = C V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{dove } \tau = RC$$

PROCESSO DI CARICA DI UN CONDENSATORE

$$q(t) = C \mathcal{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad V_C(t) = \mathcal{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad V_R(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{dove } \tau = RC$$

Forza di Lorentz

Diamo che nel punto P dello spazio è presente un campo di induzione magnetica \vec{B} in una carica puntiforme q , che muove il quel punto con velocità \vec{v} , esiste una forza \vec{F} deflettente, così perpendicolare alla velocità, secondo la relazione:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \longrightarrow \text{FORZA DI LORENTZ}$$

Note:

- 1) la forza di Lorentz è \perp alla velocità della carica q , pertanto \vec{F} non compie lavoro su q
- 2) Il campo di induzione magnetica \vec{B} non modifica la carica, ma le devia così cambia la direzione del vettore velocità.
- 3) In presenza di un campo elettrico la forza di Lorentz diventa

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

PRIMA FORMULA DI LAPLACE (Campo di induzione magnetica)

Sia $d\vec{\ell}$ un elemento di filo lungo L percorso da una corrente stazionaria I . Consideriamo $d\vec{\ell}$ orientato nel verso delle corrente I . Un elemento di corrente I di piccolo nel punto P distante z da $d\vec{\ell}$ un campo di induzione magnetica elementare $d\vec{B}$ dato dalla formula:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \longrightarrow 1^a \text{ formula di Laplace in forme differenziale}$$

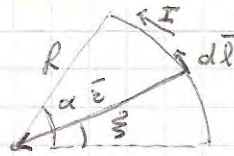
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \longrightarrow 1^a \text{ formula di Laplace in forme integrale}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Wb}{A \cdot m} \longrightarrow \text{permeabilità magnetica nel vuoto}$$

APPLICAZIONI 1^a FORMULA DI LAPLACE

CAMPO DI INDUZIONE MAGN. PRODOTTO DA UN FILO A FORMA DI ARCO DI CIRCINF.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$



$$d\vec{\ell} = R d\theta$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{R}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\alpha d\theta$$

CAMPO MAGN. SPIRA CIRCOLARE NEL SUO CENTRO

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{n}$$



CAMPO MAGN. SPIRA CIRCOLARE SUL SUO ASSE



$$d\vec{\ell} \perp \vec{r} \Rightarrow d\vec{\ell} \wedge \vec{r} = d\vec{\ell} \times \sin \alpha \vec{r} = d\ell z$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{z^2}$$

$$dB_z = dB \cos \alpha \text{ dove } \cos \alpha = \frac{R}{z}$$

$$dB_z = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{z^3} d\ell \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{z^3} \int_{\text{spira}} d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{z^3} = \frac{\mu_0 R^2}{2z^3}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \text{ dove } z^2 = R^2 + z^2$$

CAMPO MAGN. FILO RETTILINEO



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

Note

- 1) Sul filo il campo B diverge
- 2) Esternamente al filo il campo B è nullo

LEGGE DI BIOT-SAVART (CAMPO FILO INDEFINITO)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

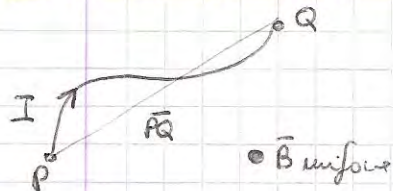
SECONDA LEGGE DI LAPLACE

$$d\vec{F} = I d\vec{e} \wedge \vec{B} \longrightarrow \text{FORMA DIFFERENZIALE}$$

$$\vec{F} = I \int_L d\vec{e} \wedge \vec{B} \longrightarrow \text{FORMA INTEGRALE}$$

APPLICAZIONI SECONDA LEGGE DI LAPLACE

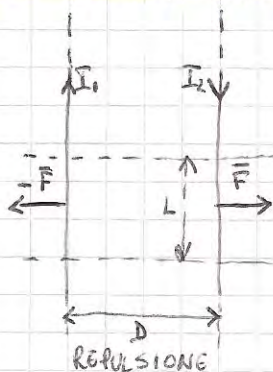
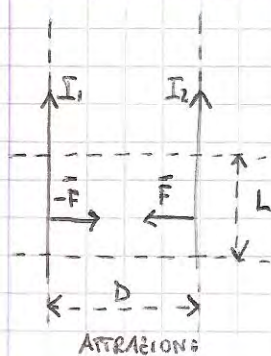
FORZA SU UN TRATTO DI FILO



$$\vec{F} = I \int_{\text{filo}} d\vec{e} \wedge \vec{B} = I \left(\int_{\text{filo}} d\vec{e} \right) \wedge \vec{B} = I \vec{PQ} \wedge \vec{B}$$

Nota: Se il filo è chiuso la forza è nulla

FORZA DI INTERAZIONE TRA DUE FILI PARALLELI E INDEFINITI



$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi D}$$

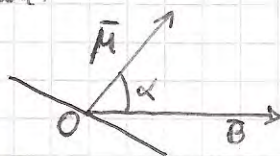
MOMENTO DI DIPOLO

Su due momenti di dipolo di una spira attraversata da una corrente I il vettore:

mag $\vec{\mu} = I \vec{S}$ dove \vec{S} è il vettore associato alla superficie S della spira e diretto perpendicolarmente alla spira.

MOMENTO MECCANICO

$$\vec{U} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

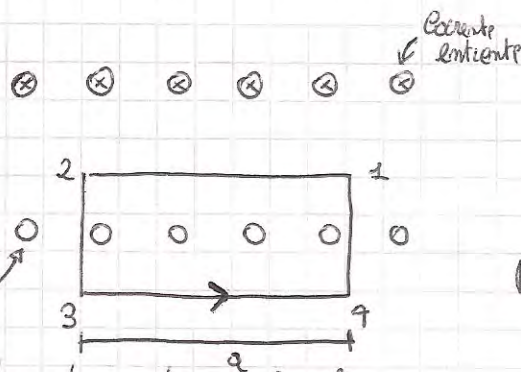
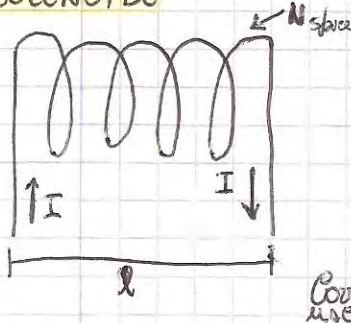


TEOREMA DI AMPERE

La circolazione del campo magnetico lungo una linea chiusa orientata è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate con la linea moltiplicata per la permeabilità magnetica nel vuoto.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \sum I_{\text{conc}}$$

SOLENOIDE



$$\oint_{\text{K34}} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_{\text{K2}} \vec{B} \cdot d\vec{e} = B \cdot a$$

$$\sum I_{\text{conc}} = I N a \quad \text{dove } N = n \cdot a$$

$$B a = \mu_0 I N a \Rightarrow B = \mu_0 I N$$

$$n = \frac{N}{l} \longrightarrow \text{numero di spire per unità di lunghezza}$$

TEOREMA DI AMPERE (FORMA INTEGRALE)

ENUNCIATO: La circolazione del campo magnetostatico lungo una linea chiusa orientata è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate con la linea moltiplicate per la permeabilità magnetica del vuoto:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{conc.}}$$

PREMESSE

CIRCOLAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE LUNGO UNA LINEA

Sia dato un campo vettoriale \vec{A} . Consideriamo una linea infinitesimale dl immersa nel campo \vec{A} . Questa infinitesimale, l'elemento di linea può considerarsi rettilineo e diretto lungo un certo verso \hat{e} che forma una certa direzione rispetto al campo \vec{A} . Orientato il segmento dl significa assegnare un vettore $d\vec{l}$ di modulo dl e della stessa direzione e verso di \hat{e} , cioè $d\vec{l} = dl \cdot \hat{e}$.

Diciamo circolazione elementare del campo vettoriale \vec{A} lungo la linea orientata $d\vec{l}$ la quantità:

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{l} = A dl \cos \alpha$$



Estendendo tale concetto al finito diciamo che

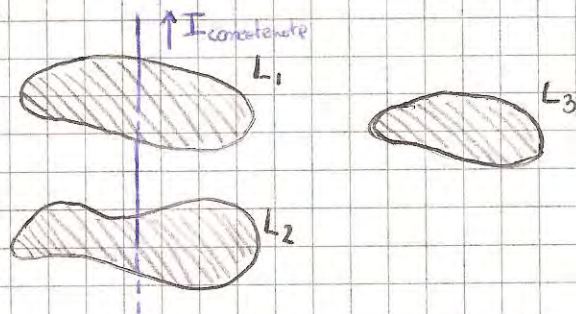
la circolazione lungo una curva L , immersa in un campo vettoriale \vec{A} non uniforme è la somma delle circolazione elementari lungo gli elementi di curva elementari orientati in cui L viene suddivisa. Si perviene quindi al seguente integrale di linea:

$$C_A(L) = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

CORRENTE CONCATENATA

Una corrente si dice concatenata alle curve L chiuse se attraversa le superfici che la come contengono la linea L .

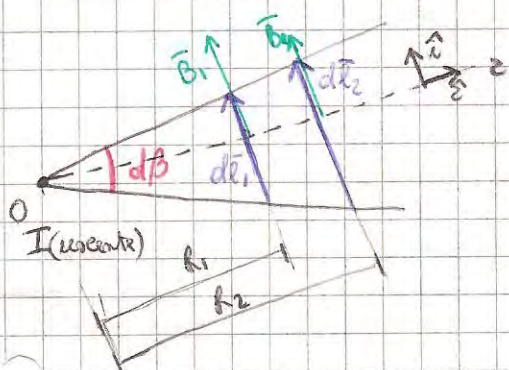
Esempio:



La corrente è concatenata alle curve L_1 e L_2 , ma non alle curve L_3 .

CIRCOLAZIONE ELEMENTARE DEL CAMPO MAGNETOSTATICO GENERATO DA UNA CORRENTE I LUNGO DUE LINEE ELEMENTARI dl_1 E dl_2 CHE SOTTENDONO UN ANGOLO PIANO $d\beta$

CASO I. Le due linee elementari dl_1 e dl_2 sono perpendicolari alle rispettive z (dispongono in O e con direzione e verso di \hat{z}), e distanze R_1 ed R_2 dall'origine O .



$$d\vec{l}_1 = dl_1 \hat{z}$$

$$d\vec{l}_2 = dl_2 \hat{z}$$

Per la legge di Biot-Savart, il campo \vec{B} a distanza R_1 vale:

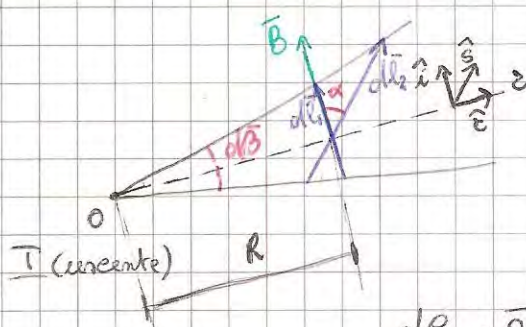
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \hat{z} \Rightarrow dC_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = B_1 dl_1 \cos 0 =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} dl_1 (\hat{z} \cdot \hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} dl_1$$

Ricordando che per definizione di radiente risulta $dl_1 = R_1 d\beta$, si ha

$$dC_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\beta, \text{ pertanto il campo non dipende dalla distanza radiale e si ha dunque che } \boxed{dC_1 = dC_2}$$

CASO I. Se due elementi dl_1 e dl_2 si trovano alle stesse distanze R dall'origine O ma sono orientati rispettivamente secondo i vettori \hat{i} ed \hat{s}



$$d\vec{l}_1 = dl_1 \hat{i} \quad d\vec{l}_2 = dl_2 \hat{s}$$

Il campo \vec{B} e distanze R vale $\vec{B} = B \hat{i}$ dove B per la legge di Biot-Savart vale:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \Rightarrow dC_1 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = B dl_1 (\hat{i} \cdot \hat{i}) \cos 0 = B dl_1$$

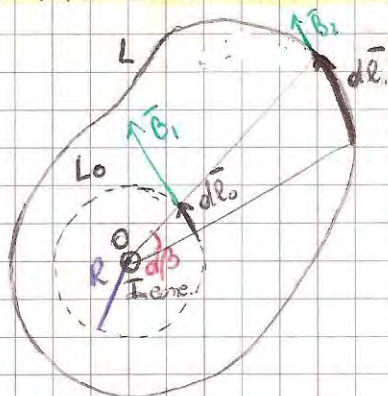
$$dC_2 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = B dl_2 (\hat{i} \cdot \hat{s}) \cos \alpha = B dl_2 \cos \alpha$$

Ricordando che $dl_1 = dl_2 \cos \alpha$ otteniamo che $dC_1 = B dl_1 = B dl_2 \cos \alpha = dC_2$

$$\boxed{dC_1 = dC_2}$$

Principi i concetti fondamentali, pensiamo ed affrontiamo il problema del calcolo della circolazione del campo magnetostatico generato da una corrente I una qualunque curva L chiusa.

CASO I. LA CORRENTE I è concorrente alle linee L



I = corrente rettilinea indefinita uscente dal piano del foglio, perpendicolare ed entro concorrente alle linee L e passante per il centro O

L_0 = circonferenza di raggio R e centro O

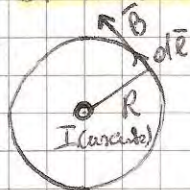
Per quanto detto al caso I delle formule risulta:

$$dC_0 = dC$$

Molte, dal momento che la superficie piena interna alle linee L può essere vista come una partizione costituita da infiniti anelli pieni uscenti da O , la circolazione del campo magnetostatico \vec{B} generato dalla corrente I lungo le linee L è quella attraverso le circonferenze L_0 , e cioè:

$$C_B(L) = \mu_0 I_{enc}$$

Nota: CIRCUITAZIONE DEL CAMPO \vec{B} GENERATO DALLA CORRENTE I LUNGO UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R .

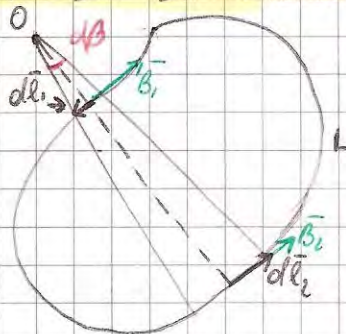


Per Biot-Savart il campo \vec{B} vale $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

La circolazione del campo \vec{B} lungo la circonferenza L è:

$$C_B(L) = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B dl \cos 0 = B \oint_L dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

CASO II. LA CORRENTE I non è concorrente alle linee L



Le circolazioni lungo le linee elementari $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ sono uguali (per le formule caso I) ed opposte perché l'orientazione di $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ è data dal verso della corrente. Quindi:

$$dC_1 = -dC_2 \Rightarrow dC_1 + dC_2 = 0$$

Dal momento che ciò è vero per qualunque altro anello pieno elementare uscente dal punto fisso O' che intersechi le linee L , ne consegue che:

$$C_B(L) = 0$$

OSSERVAZIONI:

1. In questo teorema giocano un ruolo fondamentale due concetti: una delle molture fondamentali, l'altra è di natura matematica, e cioè:
 - la dipendenza del campo magnetico dal Biot-Savart dell'inverso delle distanze.
 - la dipendenza diretta delle distanze degli archi di circonferenza.
2. Questo teorema sembra il legame tra la corrente elettrica e il campo magnetico che è un prodotto.
3. Il fatto che l'integrale di linee $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ non sia nullo ci dice che il campo \vec{B} non è conservativo, ma poiché $\text{div } \vec{B} = 0$ il campo \vec{B} risulta essere solenoidale.

TEOREMA DI AMPERE (FORMA DIFFERENZIALE)

Consideriamo una densità di corrente \vec{J} per una corrente costante. In generale, neppure che $I(t) = \int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$, se la corrente è costante con linee L che circondano una certa superficie chiusa S risulta, allora, che la somma delle correnti concatenate che possono attraversare la superficie S è uguale al flusso del campo \vec{J} attraverso la superficie S e cioè: $\sum I_{\text{conc}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

Per il teorema di Ampere risulta:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Per il tr. della circolazione il primo membro diventa $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$ per cui risulta:

$$\oint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Per l'arbitrarietà della superficie S , gli integrali devono essere uguali:

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Grazie alle equazioni fondamentali dell'elettrostatica e al tr. di Ampere si è dimostrato che i campi elettrostatici e di induzione magnetica sono indipendenti tra loro in conclusioni di staticità. Ma come succede se tali conclusioni non sussistono? Per rispondere bisogna introdurre le leggi dell'induzione elettromagnetica (o anche leggi di Faraday - Neumann - Lenz).

LEGGI DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA (FORMA INTEGRALE)

Consideriamo un campo di induzione magnetica \vec{B} in generale variabile da punto a punto e dipendente dal tempo. Sia L una linea chiusa contenuta nel dominio di \vec{B} . Le leggi dell'induzione magnetica affermano che la circolazione del campo elettromotore \vec{E}_i^{tot} lungo la linea chiusa L è uguale alla derivata totale rispetto al tempo, cambiata di segno, del flusso del campo \vec{B} attraverso una qualunque superficie S che si affochi alla linea L .

$$\oint_L \vec{E}_i^{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S(L)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

dove: l'integrale al primo membro è detto anche forza elettromotrice (f.e.m.)

l'integrale al secondo membro è la variazione rispetto al tempo del flusso del campo \vec{B} attraverso una superficie S dipendente dal tempo

$$f.e.m. = - \frac{d\Phi_B(t)}{dt} \xrightarrow{\text{1}^a \text{ LEGGE DI OHM}} I = \frac{f.e.m.}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

LEGGI DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA (FORMA DIFFERENZIALE)

La legge dell'induzione elettromagnetica in forma differenziale assume la seguente forma:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

Questa equazione dimostra che il rotore del campo elettrico, analogamente a quello elettrostatico in cui vale $\text{rot } \vec{E} = 0$, non è irrotazionale. Ciò significa che mentre in un dominio semplicemente connesso esso è conservativo. Ma, dal punto di vista fisico, questa formula esprime un fenomeno del tutto nuovo e cioè: un campo \vec{B} variabile nel tempo genera un campo elettrico (non conservativo).

Nota:

Da notare il fatto che la relazione, che qui sopra, esprime che un campo \vec{B} variabile nel tempo genera un campo elettrico, quindi non elettrostatico, al quale esiste indipendentemente da \vec{B} .

Dimostrazione:

Per dimostrare la relazione (1) evverremo dalle leggi dell'induzione elettromagnetica in forma integrale, che ricordiamo essere:

$$(2) \quad \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \longrightarrow \quad \text{f.e.m.} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Il secondo membro di questa relazione rappresenta la variazione del flusso del campo \vec{B} rispetto al tempo. Generalizziamo inoltre che il flusso \vec{B} non varia solo nel tempo ma anche nello spazio, in quanto la superficie S dipende due volte dal tempo t . In altre parole, riteniamo considerare la variazione del flusso del campo \vec{B} attraverso una superficie S variabile nel tempo.

Le derivate temporali di un flusso di un campo vettoriale $\vec{C}(\vec{r}, t)$, dipendente in generale dallo spazio e dal tempo è possibile scrivere nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial}{\partial t} \vec{C} \cdot d\vec{S} + \int_{S(t)} \text{div } \vec{C} \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} - \oint_{L(t)=\partial S} \vec{v} \wedge \vec{C} \cdot d\vec{l}$$

Applicando queste formule al campo \vec{B} e ricordando che $\text{div } \vec{B} = 0$, avremo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \oint_{L(t)=\partial S} \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Perfatto la (2) diventa:

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_{S(t)} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{L(t)=\partial S} \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L (\vec{E}_i + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Le quantità al primo membro rappresentano le differenze fra il campo elettromotore indotto e il campo di Lorentz. Ma tale differenza non può essere altro che il campo elettrico in questo.

1. il campo elettromotore indotto è il campo elettrico prodotto da tutte le cause che possono produrre un campo elettrico, quindi anche il campo di Lorentz.
2. Aggiungendo al campo elettromotore indotto una delle sue cause induttrici come il campo di Lorentz, allora quello che rimane è un campo elettrico.

Perfatto risultato:

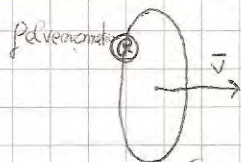
$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{applicando il th. delle derivate al 1° membro otterremo:}$$

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{per l'arbitrarietà della superficie } S \text{ risulta:}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

FENOMENI DI INDUZIONE

INDUZIONE DI 1^a SPECIE



Magnete fermo

(Circuito induttore)

Spire

(Circuito indotto)

Esperimento: magnete fermo ed spira nello spazio circostante un campo B variabile nel punto e punto. Spira che si muove con una certa velocità \vec{v}

Risultato esperimento:

- 1) L'intensità della corrente indotta, in una data istante, dipende dall'angolo di inclinazione della spira rispetto al campo magnetico. Quando la spira si allontana dal magnete, la corrente indotta è massima. Quando la spira si avvicina al magnete, la corrente indotta è minima.
- 2) Quando la spira si ferma, la corrente indotta si annulla.

CONSIDERAZIONI:

- a) A livello microscopico, gli elettroni di conduzione contenuti nella spira (elettroni liberi) si muovono con velocità \vec{v} (la stessa velocità della spira) nel campo B e pertanto subiscono l'azione delle forze di Lorentz. In conseguenza di ciò si produce una d.d.p. nella spira.
- b) L'intensità della corrente indotta, in movimento, il flusso del campo B ed è come se fosse un campo B variabile. Quindi la variazione del flusso del campo B nel tempo genera una f.e.m. lungo una qualunque linea chiusa dello spazio, quindi anche lungo i punti della spira.

INDUZIONE DI 2^a SPECIE



\vec{v}

Magnete

(Circuito induttore)



Spire

(Circuito indotto)

Esperimento: magnete che si muove con velocità \vec{v} e genera un campo B variabile. Spira ferma.

Risultati esperimento:

Risultati di questo esperimento sono analoghi a quelli ottenuti con il magnete fermo.

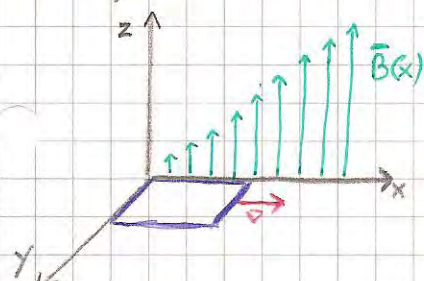
CONSIDERAZIONI:

- a) Non vi è, queste volte, spostamento di carica di conduzione della spira e quindi non vi è forze di Lorentz.
- b) Poiché non vi è movimento delle cariche di conduzione, a livello microscopico le leggi dell'induzione elettromagnetica sembrerebbero non valere, più i casi di induzione di seconda specie, eppure la corrente indotta nella spira viene rilevata.
- c) Il fatto che al livello microscopico esista una differenza fra la visione della meccanica classica e quella dell'elettromagnetismo.

CONCLUSIONI

La differenza fra la visione della meccanica classica e quella dell'elettromagnetismo si risolve ricorrendo alle teorie della Relatività Ristretta formulate da Einstein. Secondo tale teoria, in campi E e B non sono altro che due modi di manifestarsi dello stesso ente fisico e cioè il Campo elettromagnetico. Tale teoria trova giustificazione nel fatto che la meccanica classica tende a spiegare fenomeni fisici, estendendo il fenomeno del resto dell'universo e adottando un sistema di riferimento assoluto per descrivere.

Le teorie della Relatività Ristretta affermano che fenomeni di natura elettromagnetica non possono essere spiegati considerando un solo sistema di riferimento assoluto, ma bisogna considerare sistemi differenti e secondo del fenomeno considerato (elettrico o magnetico), bisogna quindi introdurre sistemi che non sono assoluti ma piuttosto relativi agli oggetti considerati. Per comprendere meglio le visioni relativistiche di Einstein facciamo un esempio:



Consideriamo una spira rettangolare con due lati coincidenti con gli assi x e y , immersa in un campo di induzione magnetica B di direzione \vec{z} e variabile linearmente lungo x : $B(x) = B_0 x$. La spira si muove con velocità $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$ costante e mantenendo sempre il suo lato coincidente con l'asse x . Che succede? Il risultato di questo esperimento è evidentemente il sorgere di una f.e.m. indotta nella spira, ma i punti da cui sono due:

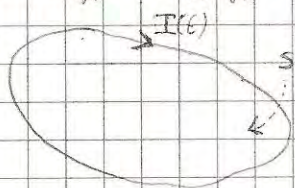
1) Punto di vista dell'osservatore solidale con gli assi x, y, z : l'osservatore vede che la spira si muove e nota che il flusso di \vec{B} attraverso la spira cresce perché invade zone in cui il campo è sempre più intenso. Le cause, dunque, dell'aumento del flusso è dovuto al movimento della spira (induzione di 1ª specie)

2) Punto di vista dell'osservatore solidale con la spira: l'osservatore vede la spira ferma, ma nota che nel tempo il campo all'interno della spira cresce e pertanto cresce il flusso di \vec{B} attraverso la spira. Le cause, dunque, dell'aumento del flusso è dovuto alle variazioni temporali del campo \vec{B} nella spira (induzione di 2ª specie)

AUTOINDUZIONE

Per i fenomeni di induzione elettromagnetica vieni anche quello dell'autoinduzione. Questo fenomeno prevede la presenza di un circuito indotto e uno induttore, ma è sufficiente un circuito attraversato da una corrente variabile nel tempo.

Per il fenomeno di autoinduzione risulta che un circuito è attraversato da una corrente $I(t)$, la corrente genera un campo $\vec{B}(t)$ proporzionale all'intensità per intensità col $I(t)$. Vi sarà dunque un flusso del campo di induzione magnetica, attraverso una qualunque superficie S che si appoggia al circuito, che risulta essere proporzionale a $I(t)$



$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = LI(t)$$

dove $L = \frac{\Phi_B}{I}$ è detto coefficiente di autoinduzione o semplicemente induttanza

Un fenomeno di autoinduzione le legge dell'induzione elettromagnetica si scrive:

$$f.e.m. = - \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = - \frac{dLI}{dt} \rightarrow \text{legge dell'autoinduzione elettromagnetica}$$

AUTOINDUZIONE IN UN SOLENOIDE

Se I la corrente che fluisce in un solenoide avente: N spire di sezione S ; lunghezza l . Detto m la densità di spire del solenoide avremo che $m = \frac{N}{l}$. In condizioni di idealità (campo \vec{B} nullo fuori del solenoide e uniforme \vec{B} nel suo interno), il campo \vec{B} nelle N spire $B = \mu_0 m I$. Pertanto il flusso concatenato con l' i -esima spira è

$$(\Phi_B)_i = BS = \mu_0 m IS \rightarrow (\Phi_B)_i = \mu_0 \frac{N}{l} IS$$

Il flusso concatenato con le N spire del solenoide è quindi:

$$\Phi_B = N(\Phi_B)_i \rightarrow \Phi_B = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS$$

Da cui il coefficiente di autoinduzione L :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

MUTUA INDUZIONE

Consideriamo due circuiti fermi attraversati dalle correnti $I_1(t)$ e $I_2(t)$. La corrente $I_1(t)$ genera un campo $\vec{B}_1(t)$ e quindi un flusso $\Phi_2(t)$ concatenato con il circuito 2.

Il flusso $\Phi_2(t)$ risulta proporzionale a $I_1(t)$

$$\Phi_2(t) = M_{12} I_1(t) \quad \text{dove } M_{12} = \text{coefficiente di mutua induzione}$$

Nel circuito 2 si genera una f.e.m.₂ indotta per cui

$$f.e.m._2 = - \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = - \frac{d(M_{12} I_1)}{dt} = - M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

Rispetto al circuito 1, la situazione sarà del tutto analoga e pertanto valgono che $M_{12} = M_{21} = M$ e il valore dei coefficienti sarà:

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\Phi_1}{I_2}$$

TEOREMA DI AMPERE - MAXWELL (FORMA DIFFERENZIALE)

La formulazione di questo teorema nasce da un problema "circolto" del teorema di Ampere in forma differenziale, cioè: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, il quale non ha valute generale ma solo in condizioni di stazionarietà, cioè con campi elettrici e magnetici non dipendenti dal tempo.

Dunque, con questo teorema si cerca di generalizzare il teorema di Ampere e per farlo ci serviamo dell'equazione di continuità.

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{equazione di continuità}$$

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che nel teorema di Ampere manchi qualcosa, quindi supponiamo che ne:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{X}) \quad \text{dove } \vec{X} \text{ è un termine che ha le dimensioni fisiche di una densità di corrente.}$$

Calcolando le divergenze al 1° e 2° membro otteniamo:

$$\text{div rot } \vec{B} = \mu_0 \text{div} (\vec{J} + \vec{X}) \quad \text{da cui:} \quad \begin{aligned} \text{div rot } \vec{B} &= 0 \\ \text{div} (\vec{J} + \vec{X}) &= \text{div } \vec{J} + \text{div } \vec{X} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\text{div } \vec{J} + \text{div } \vec{X} = 0 \quad (1)$$

Dell'equazione di continuità sappiamo che la divergenza di \vec{J} vale: $\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.
Del tl. di Gauss in forma differenziale sappiamo che $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$
Pertanto:

$$\text{div } \vec{J} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} \Rightarrow \text{div } \vec{J} = -\text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Sostituendo nelle (1) troviamo:

$$-\text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \text{div } \vec{X} = 0 \Rightarrow \text{div} \left(\vec{X} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Dato che $\left(\vec{X} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ è un campo vettoriale la cui divergenza è nulla allora

il campo \vec{X} può essere espresso come il rotore di un campo vettoriale \vec{Z} che rappresenta il suo potenziale vettore. Quindi:

$$\vec{X} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{Z}$$

Ipotezzando che il campo \vec{Z} sia conservativo, allora $\text{rot } \vec{Z} = 0$, per cui:

$$\vec{X} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A questo punto l'equazione di partenza, cioè $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{X})$ diventa:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

In questo risultato compare il tl. di Ampere-Maxwell.

OSSERVAZIONI:

L'ipotesi dell'esistenza del termine \vec{X} nel teorema di Ampere porta ad una perfetta simmetria tra i campi \vec{E} e \vec{B} . Infatti così come un campo elettrico è prodotto da cariche e da campi \vec{B} variabili nel tempo (legge dell'induzione elettromagnetica), il teorema di Ampere-Maxwell dice che un campo di induzione magnetica è prodotto da correnti e da campi elettrici variabili nel tempo.

TEOREMA DI AMPERE - MAXWELL (FORMA INTEGRALE)

Integriamo l'equazione: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ su una qualunque superficie S dello spazio, fissa e orientata, avente come contorno una linea chiusa L :

$$\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Nell'ultimo termine, poiché la superficie S è fissa, l'operatore derivato temporale può portare fuori dal segno dell'integrale, ottenendo:

$$\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

dove:

1) $\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ per il tl. delle equazioni

2) $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_{\text{corrente}}$ per definizione di corrente concatenata alle linee L

3) $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_E(S)$ flusso del campo elettrico attraverso la superficie S

Portando:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{corrente}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_E(S)$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{\text{corrente}} + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E(S)}{\partial t} \right) \quad (*)$$

Nota: CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Le correnti originate da una variazione nel tempo del campo elettrico si chiamano correnti di spostamento

$$I_s = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E(S)}{\partial t}$$

Per quanto detto in note la (*) diventa

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{corrente}} + I_s)$$

Quest'ultima espressione costituisce il tl. di Ampere - Maxwell in forma integrale.

EQUAZIONI DI MAXWELL

	FORMA INTEGRALE (NON LOCALE)	FORMA DIFFERENZIALE (LOCALE)
TH. GAUSS	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
FORMULE DEL CAMPO MAGNETICO	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
LEGGE DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA	$\oint_L \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
TH. AMPERE - MAXWELL	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{corrente}} + I_s)$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

0) Quale differenza di impostazione riconosco, nella descrizione delle leggi naturali, fra le "visioni" di Newton, Faraday e Maxwell ?

E' importante realizzare che Newton ragionava in termini di "azioni a distanza" esieraresocontodell'inadeguatezzadiquelladescrizione. Tentòdirisolvernelacontraddizionein trinseca. Peresempiosiposeilproblemadicomefossepossibileconciliareilsuoterzoprincipio, dia zioneereazione, applicatoadentilontanissimi, conladomanda: "eseall'improvvisounodeiduees plode, dopoquantotemposeneaccorgel'altro? Istantaneamente?".

Nonriuscendoatrovareunarispostaplausibile, ammisechequalcunaltroinfuturocisarebberiusc ito. Ecosièstato. Maxwellintroduceilcampovettorialechemedial'azionefraglientidellastessanat ura. Peresempio, unacaricafermacreauncampo elettrostatico, edun'altranerisenteglieffetti(lafor za. E il ruolo è intercambiabile. Ma prima di Maxwell, ad onor del vero, bisogna citare Faraday, genio ma privo di conoscenze matematiche. Egli, amico ma piu' vecchio di Maxwell di 30 anni, ha certamente avuto un ruolo importante nel far maturare nel giovane amico l'idea di campo. Faraday, molto colpito dalla disposizione della limatura di ferro sotto l'azione di un campo magnetico, aveva messo a punto un suo metodo grafico, quello delle linee di forza, ancora in uso adesso quando si vogliono descrivere i campi in modo qualitativo e visivamente molto efficace. Per Faraday "l'azione" del magnete era piu' forte dove le linee erano più dense e meno forte dove erano più rarefatte. Sarà poi Maxwell a dare sostanza matematica compiuta a queste idee embrionali con l'introduzione di campo vettoriale e della sua azione locale.

1) Cosa so dire su massa e carica?

La massa è la sorgente del campo gravitazionale. La carica, in ultima analisi, è una delle sorgenti dei Campi elettromagnetici .[Si consiglia: Approfondire implicazioni relatività ristretta - elettromagnetismo. Approfondire implicazioni relatività ristretta - meccanica classica].

2) Perché i campi centrali sono così importanti?

Tutti i campi centrali sono conservativi [non vale il viceversa].

3) Quanti campi centrali propri e impropri so citare?

Campo gravitazionale terrestre su scala astronomica. Campo gravitazionale terrestre su piccola scala [improprio]. Campo elastico di Hooke. Etc. etc.

4) Quale è, generalmente, la relazione fra il campo e la forza che esso esplica?

La Forza, in un dato punto, è funzione del campo, in quel punto, e di un "ente" di natura uguale alla sorgente posto in quel punto. Nei casi più semplici la funzione è una semplice moltiplicazione. Per esempio forza peso = campo g * mtest. O ancora, Forza elettrostatica = Campo elettrostatico * qtest. Nei casi più complicati la funzione può essere diversa dalla semplice moltiplicazione. Forza magnetica [di Lorentz] = qtest * vel [*vettor*] B. etc. etc.

5) Un campo gravitazionale da chi/cosa è generato?

Da una proprietà che alcuni enti hanno e che chiamiamo massa. Per esempio, la luce non ha massa .

6) Un campo gravitazionale da chi/cosa è sentito?

Secondo la fisica classica dalle masse. Secondo la relatività anche dalla luce. Infatti la luce proveniente dalle stelle deflette in vicinanza di oggetti celesti dotati di massa.

7) Un campo elettrostatico da chi/cosa è generato?

Da una carica ferma rispetto all'osservatore.

8) Un campo elettrostatico da chi/cosa è sentito?

Da una carica [ferma o non] immersa nel campo elettrostatico.

9) Un campo elettrico da chi/cosa è generato?

Da una separazione di cariche elettriche [per esempio un conduttore che viaggia nel campo B] oppure senza che vi siano cariche coinvolte da una variazione temporale del campo di induzione magnetica B].

10) Un campo elettrico da chi/cosa è sentito?

Da ciò che lo crea: le cariche elettriche. Anche qui ci viene il sospetto che ci debba essere un legame molto profondo fra campo elettrico e magnetico. Un campo magnetico variabile crea un campo elettrico, come fosse una carica.

11) C'è qualche nesso fra il teorema di Gauss e i campi centrali ?

Certo. Il teorema di Gauss non avrebbe mai visto la luce se non esistessero i campi centrali. Per dirla in maniera più seria: la centralità del campo è condizione necessaria ma non sufficiente per l'applicabilità del teorema di Gauss.

12) Quali sono le due proprietà [una fisica e una matematica] che rendono possibile l'indipendenza dalla forma della superficie di Gauss?

Quella fisica è che il campo generato da una sorgente scalare [quindi isotropa] puntiforme deve necessariamente dipendere dall'inverso del quadrato della distanza [campo newtoniano]. Perché necessariamente? Perché altrimenti si creerebbe energia dal nulla. E qui veniamo alla seconda proprietà che attiene allo spazio euclideo, R^3 , in cui per la fisica classica viviamo tutti noi. La proprietà è che le superfici sferiche dipendono dal quadrato del raggio.

Vi ripeto quello che dico sempre a lezione su questo argomento. Ragioniamo insieme. Se un barattolo di vernice è esattamente sufficiente a pittare una sfera di raggio 1, quanti barattoli servono per pittare una sfera di raggio 2 ? Quattro ! ... e una sfera di raggio 3 ? Nove! Cioè il quadrato del raggio.

Viceversa. Se ho un barattolo che mi consente di fare 4 mani di vernice su una sfera di raggio 1, quante mani posso fare su una sfera di raggio 2? Una sola ! Vedendola in modo dinamico, se la sfera di raggio 1 si gonfia fino a diventare di raggio 2, lo spessore si riduce fino a diventare $1/4 = 1/2^2$. E se si gonfia fino a diventare di raggio 3, lo spessore si riduce fino a diventare $1/9 = 1/3^2$. etc. Proprio la dipendenza dei campi newtoniani dalla distanza.

In questo esempio la quantità di vernice è l'energia totale di cui si dispone. La quantità di vernice a mq è la densità superficiale d'energia. Quando la sfera si gonfia [onda sferica propagantesi] l'energia totale sulla sua superficie rimane sempre la stessa, ma dal momento che la superficie cresce col quadrato del raggio, di conseguenza la densità superficiale si riduce col quadrato del raggio. Cioè va come r^{-2} .

E dunque se consideriamo il prodotto dell'intensità del campo per la superficie sferica otteniamo qualcosa che non dipende dalla distanza. Chiamiamo questo qualcosa il "quasi-flusso". Perché "quasi" ? Perché il flusso vero è ancora più speciale e miracoloso. E ciò si ottiene solo se invece di moltiplicare algebricamente